**Institutt for fysikk, NTNU**
**TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme**
**Vår 2008, uke 3**

# Tirsdag 15.01.07

## Elektrisk felt

[FGT 22.1; YF 21.4; TM 21.4; AF 21.5; LHL 19.4; DJG 2.1.3]

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q}$$

= kraft pr ladningsenhet

SI-enhet for elektrisk felt: $[E]$ = N/C

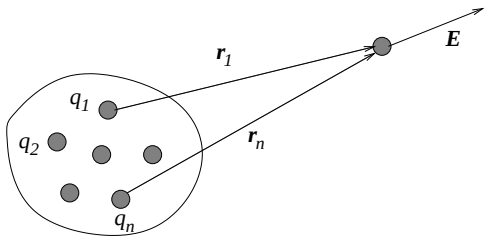
## Elektrisk felt fra punktladning

[FGT 22.1; YF 21.4; TM 21.4; AF 21.6; LHL 19.5; DJG 2.1.3]

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Superposisjonsprinsipp for elektrisk felt:

$$\boldsymbol{E} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{E}_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j}{r_j^2}\hat{r}_j$$




## Kontinuerlige ladningsfordelinger

[FGT 21.4, 22.3; YF 21.5; TM 22.1; AF eks. 21.6; LHL 19.5; DJG 2.1.4]

På en lengdeskala som er stor i forhold til avstanden mellom enkeltladninger ser man en tilnærmet *kontinuerlig* ladningsfordeling. (På samme måte som at makroskopiske objekter har en tilnærmet kontinuerlig massefordeling, selv om de egentlig består av "enkeltmasser" (atomer).)

*Sum* over enkeltladninger erstattes da av *integral* over en ladningsfordeling:

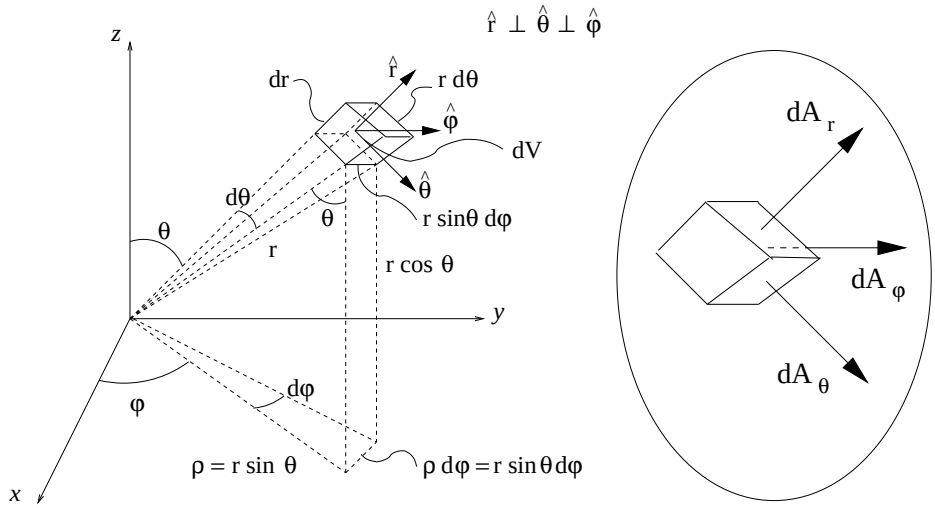
$$\sum_i \Delta q_i \overset{\Delta q_i \to 0}{\longrightarrow} \int dq$$

$3D$ (= 3 dimensjoner): romladning

$$
\begin{aligned}
dq &= \rho\, dV \\
\rho &= \rho(x,y,z) = \text{ ladning pr volumenhet } = \text{ romladningstetthet} \\
[\rho] &= [q/V] = \mathrm{C/m^3} \\
\text{Volumelement} : dV &= dx\, dy\, dz \ \text{ (kartesiske koordinater)} \\
&= r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr \ \text{ (kulekoordinater)} \\
&= \rho\, d\rho\, d\phi\, dz \ \text{ (sylinderkoordinater)}
\end{aligned}
$$

(Merk: Brukte symbolet $s$ i stedet for $\rho$ i forelesningene, for ikke å blande sammen med ladning pr volumenhet $\rho$.)

Volumelement dV i kulekoordinater:




dV = (dr) (r dθ) (r sin θ dφ)

$2D$: flateladning

$$
\begin{aligned}
dq &= \sigma\, dA \\
\sigma &= \sigma(x,y) = \text{ ladning pr flateenhet } = \text{ flateladningstetthet} \\
[\sigma] &= [q/A] = \mathrm{C/m^2} \\
\text{Flateelement} : dA &= dx\, dy \ \text{ (kartesiske koordinater)} \\
&= r\, d\phi\, dr \ \text{ (polarkoordinater)}
\end{aligned}
$$

$1D$: linjeladning

$$
\begin{aligned}
dq &= \lambda\, dl \\
\lambda &= \lambda(x) = \text{ ladning pr lengdeenhet } = \text{ linjeladningstetthet} \\
[\lambda] &= [q/L] = \mathrm{C/m} \\
\text{Linjeelement} : dl &= dx \ \text{ (rett linje)} \\
&= R\, d\phi \ \text{ (for sirkel med radius } R\text{)}
\end{aligned}
$$

Elektrisk felt i avstand $\boldsymbol{r}$ fra infinitesimal ladning $dq$:

$$d\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

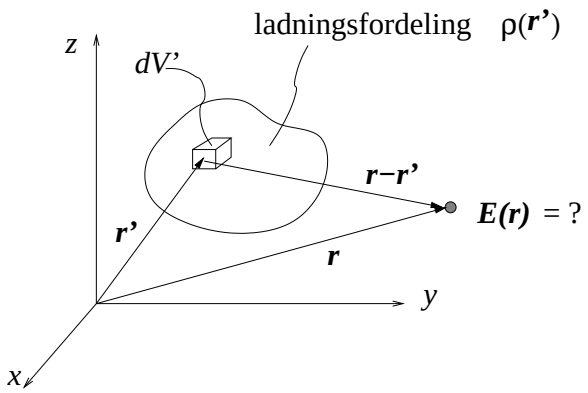
Elektrisk felt fra kontinuerlig ladningsfordeling:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\hat{r}\ dq}{r^2} \overset{3D}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\hat{r}\rho\ dV}{r^2}$$

Mer presist: Det elektriske feltet $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ i et punkt $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ på grunn av en fordeling av elektrisk ladning beskrevet ved ladningstettheten $\rho(\boldsymbol{r}') = \rho(x', y', z')$ er gitt ved

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\ dV'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

der $dV' = dx'\ dy'\ dz'$ (i kartesiske koordinater) er et volumelement i posisjon $\boldsymbol{r}'$.
Legg merke til at $\boldsymbol{r}$ ikke har samme betydning i de to siste ligningene. I den første angir $\boldsymbol{r}$ vektoren fra $dq$ til punktet der $\boldsymbol{E}$ skal bestemmes. Dermed vil $\boldsymbol{r}$ være forskjellig for de ulike ladningselementene $dq$ i systemet vi ser på. I den andre ligningen angir $\boldsymbol{r}$ posisjonen der $\boldsymbol{E}$ skal bestemmes, mens $\boldsymbol{r}'$ er posisjonsvariabelen til ladningstettheten $\rho$. Her hadde vi valget mellom å innføre en ny vektor $\boldsymbol{\mathcal{R}} \equiv \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ og skrive $\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}/\mathcal{R}^2$, eller (som vi valgte) å skrive om enhetsvektoren. På sin plass med en figur, kanskje:




Vi ser at den "aktuelle" enhetsvektoren skal peke fra volumelementet $dV'$ i posisjon $\boldsymbol{r}'$ til posisjonen $\boldsymbol{r}$. Vi kan dermed skrive $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3$ i uttrykket for $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$.

# Onsdag 16.01.07

**Elektriske feltlinjer**
[FGT 22.2; YF 21.6; TM 21.5; AF 21.6; LHL 19.6; DJG 2.2.1]

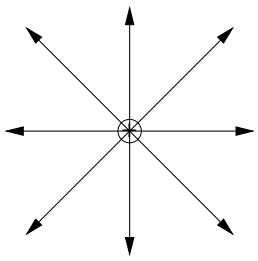
- gir en visuell framstilling av $\boldsymbol{E}$ i et område
- $\boldsymbol{E}$ ligger tangentielt til feltlinjene overalt
- styrken på $\boldsymbol{E}$ (dvs $|\boldsymbol{E}|$) er proporsjonal med tettheten av feltlinjer, dvs antall feltlinjer pr flateenhet

Konsekvenser av dette er bl.a. at

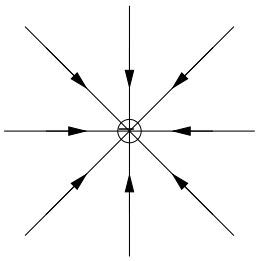
- feltlinjene går radielt *ut fra* positive (punkt-)ladninger og radielt *inn mot* negative ladninger
- like mange feltlinjer går ut fra ladning $+Q$ som inn mot $-Q$

Eksempler:

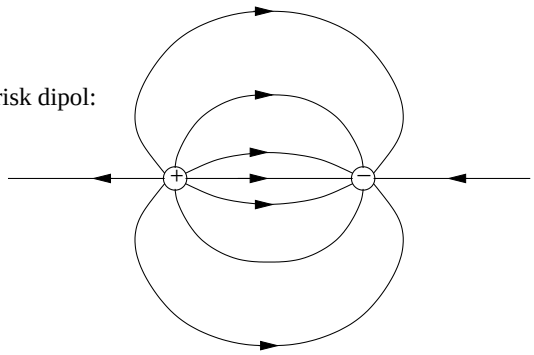
positiv punktladning:



negativ punktladning:



elektrisk dipol:



**Elektrisk dipol og elektrisk dipolmoment**
[FGT 22.1; YF 21.7; TM 21.4; AF 21.11; LHL 19.10; DJG 2.2.1, 3.4.2]

Dersom vi har to ladninger $q$ og $-q$ i en viss innbyrdes avstand, har vi en elektrisk dipol. Avstandsvektoren $\boldsymbol{d}$ fra den negative ladningen $-q$ til den positive ladningen $q$ beskriver hvordan de to er lokalisert i forhold til hverandre.
Dipolens elektriske *dipolmoment* $\boldsymbol{p}$ er da:

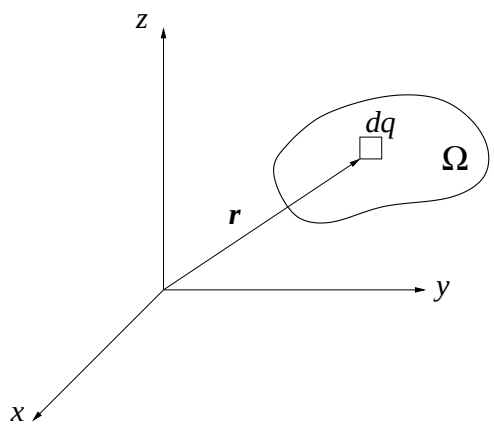
$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$

Dipolmomentet er altså en *vektor* som peker fra den negative mot den positive ladningen, med størrelse lik produktet av ladningen $q$ og avstanden $d$.
SI-enhet for elektrisk dipolmoment: $[p] = [qd] = \text{Cm}$.
Mye brukt alternativ enhet for elektrisk dipolmoment: 1 D (debye) $\simeq 3.336 \cdot 10^{-30}$ Cm.

Mer generelt kan vi definere det elektriske dipolmomentet for en vilkårlig (kontinuerlig) ladningsfordeling innenfor et romlig område $\Omega$:

$$\boldsymbol{p} = \int_\Omega \boldsymbol{r}\, dq$$

Her kan $\Omega$ være et område i 1, 2 eller 3 dimensjoner.




I 1D ("linjeladning"):

$$\begin{aligned} dq &= \lambda(x)\, dx \\ \boldsymbol{r} &= x\,\hat{x} \end{aligned}$$

I 2D ("flateladning"):

$$\begin{aligned} dq &= \sigma\, dA \\ &= \sigma(x,y)\, dx\, dy \ \text{ (kartesisk)} \\ &\phantom{=}\ \sigma(r,\phi)\, r\, dr\, d\phi \ \text{ (polarkoord)} \\ \boldsymbol{r} &= x\,\hat{x} + y\,\hat{y} \ \text{ (kartesisk)} \\ &\phantom{=}\ r\,\hat{r} \ \text{ (polarkoord)} \end{aligned}$$

I 3D ("romladning"):

$$
\begin{aligned}
dq &= \rho\, dV \\
&= \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \quad \text{(kartesisk)} \\
&\phantom{=}\ \rho(r,\theta,\phi)\, r^2\, dr\, \sin\theta\, d\theta\, d\phi \quad \text{(kulekoord)} \\
\boldsymbol{r} &= x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z} \quad \text{(kartesisk)} \\
&\phantom{=}\ r\,\hat{r} \quad \text{(kulekoord)}
\end{aligned}
$$

Dersom systemet består av $n$ punktladninger $q_1, q_2, \ldots, q_n$ i posisjoner $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$, blir systemets elektriske dipolmoment

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i\, q_i$$

Det elektriske dipolmomentet $\boldsymbol{p}$ er bare entydig definert dersom systemet har null netto ladning, dvs

$$Q = \int_\Omega dq = 0$$

Da spiller det for eksempel ingen rolle hvor vi velger origo.

Dersom systemets nettoladning $Q$ er forskjellig fra null, vil $\boldsymbol{p}$ avhenge av hvor vi plasserer origo (dvs $\boldsymbol{r} = 0$). Vi vil kun snakke om elektrisk dipol og dipolmoment i forbindelse med systemer med null nettoladning.

*Ekstratimen* onsdag 16.01. ble brukt til å påvise frastøtning mellom to legemer (ballonger) med samme type elektrisk ladning, tiltrekning mellom en ladet ballong og en ladet trepinne (altså motsatt type ladning), frastøtning mellom en ladet ballong og en ladet slikkepott i plast (samme type ladning), og endelig tiltrekning mellom en ladet ballong og en elektrisk nøytral ølboks. Boksen har frie elektroner som kan flytte på seg når de utsettes for elektrisk kraft fra ladningen på ballongen. Siden av boksen nærmest ballongen får motsatt type ladning i forhold til ballongen, siden lengst fra ballongen får samme type ladning som ballongen. Nettokraften fra ballongen på ølboksen blir *tiltrekkende* fordi ladningen av motsatt type er nærmest ballongen. Deretter ble det regnet et par eksempler på beregning av elektrisk felt fra kontinuerlig ladningsfordeling: Uniformt ladet stav, og stav med motsatt type ladning på hver halvdel. I begge tilfeller ble feltet beregnet på stavens akse.