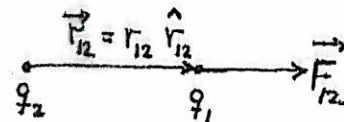


Elektrostatikk

Ø1-Ø9

Coulombs Lov: $\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \hat{r}_{12}$



Ø1/4-5

Superposisjonsprinsippet: $\vec{F}_i = \sum_j \vec{F}_{ij} = \sum_j \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^2} \hat{r}_{ij}$

(SPP)

Des 03/1

= total kraft på q_i fra flere q_j

Elektrisk felt: $\vec{E} = \vec{F} / q$ = elektrisk kraft pr ladningsenhet som virker på q

Punktladning: $\vec{E} = \frac{q \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$



Felt fra flere punktladninger: $\vec{E} = \sum_j \frac{q_j \hat{r}_j}{4\pi\epsilon_0 r_j^2}$ (SPP!)

Des 02/1

Felt fra kontinuerlig ladningsfordeling:

$$\vec{E} = \int \frac{dq \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Des 03/3

1D: $dq = \lambda dl = \lambda(x) dx$ $[\lambda] = C/m$

Ø2/3

2D: $dq = \sigma dA = \sigma(x, y) dx dy$

C/m^2

$\sigma(r, \phi) r dr d\phi$

syndler-symm. $2\pi \sigma(r) r dr$

3D: $dq = \rho dV = \rho(x, y, z) dx dy dz$

C/m^3

$\rho(s, \phi, z) s ds d\phi dz$

syndler-symm. $2\pi \rho(s, z) s ds dz$

$\rho(r, \theta, \phi) r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$

kuler-symm. $4\pi \rho(r) r^2 dr$

Ø2/4

Ø3/3

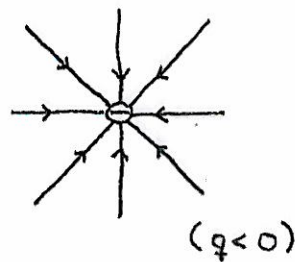
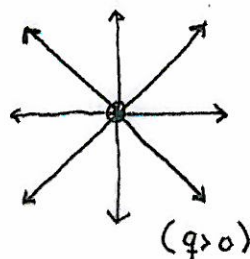
Ø6/1

Feltlinjer for \vec{E} : $\vec{E} \parallel$ feltlinjene

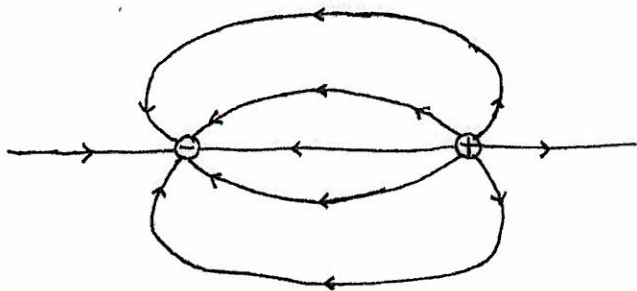
Ø2/5

$E = |\vec{E}| \sim$ antall feltlinjer pr flateenhet

Punktladning:

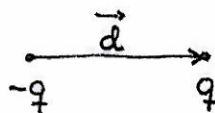


Elektrisk dipol:



Ø4/1
Ø3/4

Dipolmoment: $\vec{p} = q \vec{d}$



For kontinuerlig ladningsfordeling (med $Q = \int_V \rho \, dV = 0$):

$$\vec{p} = \int_V \rho(\vec{r}) \vec{r} \, dV$$

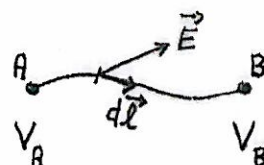
Ø6/4

Mai 05/3

Elektrisk potensial = pot. energi pr ladningsenhet:

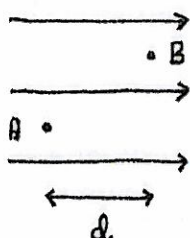
$$V = U/q ; [V] = V = J/C$$

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



Ø3/2

Uniformt E-felt:



$$\Delta V = V_B - V_A = -E \cdot d$$

Potensial fra punktladning: $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ ($V(\infty)=0$)
(Coulombpotensialet) Des 03/1

Fra flere punktladninger: $V = \sum_j \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_j}$ (SPP!)
Des 02/1 Ø3/4

Fra kontinuerlig ladningsfordeling: $V = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$
Mai 05/3

Ekvipotensialflater = flater med konstant V

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \vec{E} \perp \text{ekvipotensialflater}$$

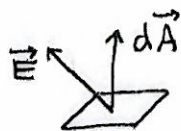
$$\vec{E} = -\nabla V$$

Ø4

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} = \text{gradient-operator}$$

Elektrostatisk felt er konservativt: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

Elektrisk fluks:



$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

(75)



Fluks gjennom S:

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Flateelement: $d\vec{A} = dx dy \hat{z}$

$$d\vec{A} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{r} \quad \text{osv}$$

Hvis kulesymmetri: $\vec{E} = E(r) \hat{r}$

anta $S = \text{kuleflate}$ med radius $R \Rightarrow \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(R) \cdot 4\pi R^2$

Hvis lukket flate S : $\Phi_c = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \text{netto fluks ut gjennom } S$

Gauss' lov for \vec{E} :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \cdot dV$$

BS

(lukket flate S omslutter volum V)

Bruker Gauss' lov til å bestemme \vec{E} når

- kulesymmetri
- plan symmetri
- sylinder symmetri

(eller kombinasjoner av disse)

06

Mai 04/1

06

Jun 07/2

05/2

Mai 06/1

Ledere (metaller): har frie (mobile) ladninger

76

I Likevekt: • $\vec{E} = 0$ inni leder

• $\rho = 0$ — " —

• netto ladning på overflaten

• $\vec{E} \perp$ overflaten på overflaten

• konstant V på hele ledere

• $E = \sigma / \epsilon_0$ på overflaten

• $E = 0$ i (tomt) hulrom

Jun 07/1

06/2

Isolator / Dielektrikum: ingen mobile ladninger

ytre felt $\vec{E}_0 \Rightarrow$ innretning av dipoler

05/4

Jun 07/1

$$\tau = \vec{p} \times \vec{E}_0$$

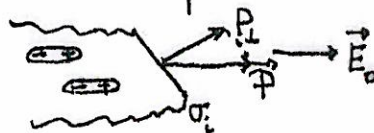
Jun 07/1

\Rightarrow induert ladning $\pm \sigma_i$ pr flateenhet på overflaten

Polarisering: \vec{P} = dipolmoment pr volumenhet = \vec{p}/V

06/3

$$P_{\perp} = \sigma_i$$



Elektrisk forskyning: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

Des 02/4

Gauss' lov: $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_f =$ netto fri ladning innenfor S

Mai 06/1

Mai 04/1

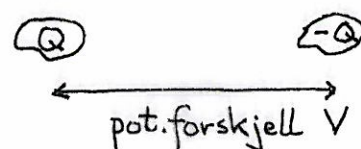
Lineær respons: $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

07-10

Kondensator = to adskilte ledere

Kapasitans: $C = Q/V$

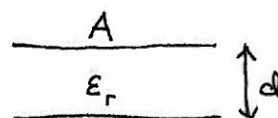


C bestemmes slik:

- anta ladning $\pm Q$
- regn ut V (muligens først \vec{E})
- "les av" $C = Q/V$

Ø7-10

Parallellplatekondensator: $C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$



Des02/4 **Mai05/1** **Des03/1**

Energi lagret i elektrisk felt, pr volumenhet: $u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$

Elektrisk strøm

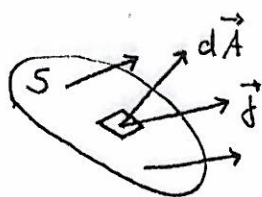
Ø10-11

Strøm = ladninger i bevegelse, dvs ladning som passerer tverrsnitt av lederen pr tidsenhet

$$\Rightarrow I = \frac{dQ}{dt}$$

Strømtetthet = strøm pr flateenhet

$$\Rightarrow j = \frac{I}{A}$$



strøm gjennom dA: $dI = j \cdot d\vec{A}$

\Rightarrow " " " " S: $I = \int_S j \cdot d\vec{A}$

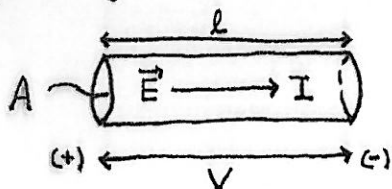
Mai04/2

Ø10/1

Des03/5

Ohms lov: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$; σ = elektrisk ledningsevne (78)

Mai 05/1



$$I = j \cdot A = \sigma \cdot E \cdot A = \sigma \cdot \frac{V}{l} \cdot A$$

$$\Rightarrow V = \frac{l}{\sigma \cdot A} \cdot I = R \cdot I$$

Resistivitet: $\rho = 1/\sigma$ ← materialspecifikke

Ø10

Konduktans: $G = 1/R$ ← også dimensjonsavhengige

Elektrisk effekt: $P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{V \Delta Q}{\Delta t} = V \cdot I$; $[P] = \frac{J}{s} = W$

(hvis ohmsk materiale: $P = RI^2 = V^2/R$)

Des 02/3

Des 03/2

Mai 04/3

Mai 05/1

Seriekobling av motstander: $R = \sum_j R_j$

———— " ——— kapasitanser: $C^{-1} = \sum_j C_j^{-1}$

Parallellkobling av motstander: $R^{-1} = \sum_j R_j^{-1}$

———— " ——— kapasitanser: $C = \sum_j C_j$

Må forstås og kunne utledes

Ø10

Ø9-10

Kretser:

Ø11, Ø10

Mai 06/2

Likespenningskilde: $\frac{+}{-} \text{E}$ = elektromotorisk spenning (konstant)

Vekselspenningskilde: $\text{~} \text{E}(t) = V_0 \cos \omega t$

(\Rightarrow impedans $Z(\omega) = V_0 / I_0(\omega)$)

Des 02/6

Ø11

K1: Ladningsbevarelse $\Rightarrow \sum_j I_j = 0$ i alle kretsens knutepunkt

K2: Energi — " — $\Rightarrow \sum \Delta V = 0$ for — " — lukkede sløyfer

RC-kretser: "Løses" ved å bruke $I = \frac{dQ}{dt}$,
 $\Delta V_R = RI$, $\Delta V_C = Q/C$ samt K1 og K2

Mai 05/1

(både med $E = V_0$ og $E(t) = V_0 \cos \omega t$)

Mai 05/5

Tidskonstant: $\tau = RC$

Ø11 (Ø10)

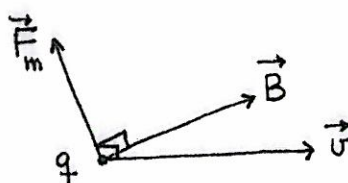
Mai 04/4

Des 03/4

Jun 07/3

Magnetostatikk

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$$



Hvis både \vec{E} og \vec{B} samtidig:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Ø11/2

Des 03/2

Lorentzkraften

Jun 07/2

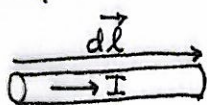
Uniformt B-felt \Rightarrow sirkelbevegelse, $r = \frac{mv}{qB}$
 (evt spiral "langs" \vec{B})

Ø11/3

vinkel-frekvens $= \omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$ ("syklotron-frekvensen")

\vec{B} -felt skapes av strøm I :

Des 02/2



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Biot-Savarts Lov

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am} = \text{vakuum-permeabiliteten}$$

$$[B] = T \text{ (tesla)}; \quad 1 \text{ gauss} = 1G = 10^{-4} T$$

(80)

SPP gjelder for $\vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$

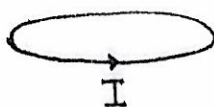
~~Ø11/4~~

= felt fra lukket strømsløyfe

Lang, rett leder $\Rightarrow B(x) = \mu_0 I / 2\pi x$ (x = avstand fra ledere)

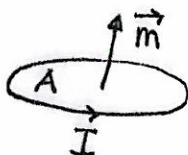
Magnetiske feltlinjer: samme def. som for \vec{E}
alltid lukkede feltlinjer for \vec{B}
(pga ingen magnetiske "monopoler")

Magnetisk dipol:



(lukket strømsløyfe)

Magnetisk dipolmoment:



$$\vec{m} = I \vec{A}$$

~~Ø11-13~~~~Ø11-13~~

Generell definisjon: $\vec{m} = \frac{1}{2} \int (\vec{r} \times \vec{j}) dV$

Elementærpartikler (e, p, n, \dots), atomer osv. er små magnetiske dipoler.

Kompassnål, jorda etc. er større magn. dipoler.

Kraft på elektrisk strøm: $\vec{F} = I \int_L d\vec{l} \times \vec{B}$

~~Ø13/1~~

Mai 06/3

Mai 04/5

Des 03/2

Amperes Lov: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

Mai 04/2

Nyttig når passende symmetri, slik at $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ blir "enkelt"

- sylindersymmetri
- lang spole
- plansymmetri
- torus

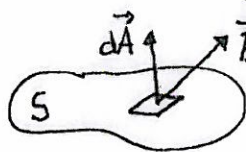
Des 03/5

Jun 07/2

Ø12

Des 02/5

Magnetisk fluks:



Fluks gjennom dA:

$$d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\Rightarrow \text{Fluks gjennom } S: \phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Gauss' lov for \vec{B} : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$

Magnetisme:

~~Ø12-14~~

Ø12-14

Paramagnetisme: innretting av permanente \vec{m} langs ytre \vec{B}_0

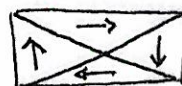
Diamagnetisme: induert \vec{m} motsatt rettet \vec{B}_0

Ferromagnetisme: vekselvirkning mellom \vec{m}_i og $\vec{m}_{i\pm 1}$

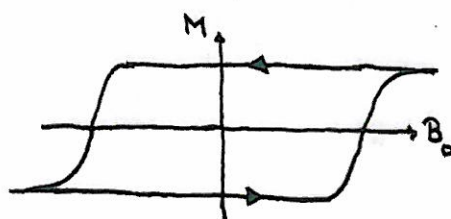
$$\Rightarrow \text{"alle"} \vec{m}_i \text{ i samme retning } (U = -J \sum_i \vec{m}_i \cdot \vec{m}_{i+1})$$

(evt $\uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \dots$ hvis antiferromagnet)

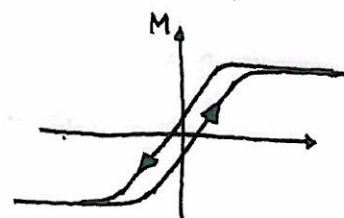
Magn. domener:



Magn. hystereses:



hard magnet

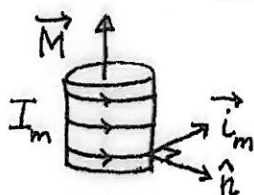


bløt magnet

Magnetisering: $\vec{M} = \frac{\vec{m}}{V} = \text{magn. dipolmoment}$
pr volumenhett

ytre felt $\vec{B}_0 \Rightarrow$ innretning av dipoler

\Rightarrow induisert overflatestrøm i_m pr lengdeenhet



$$\vec{i}_m = \vec{M} \times \hat{n}; \quad i_m = M$$

H-feltet: $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$

Mai 05/2

Amperes lov: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_f = \text{netto fri omsluttet strøm}$

Linear respons: $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$

~~Ø15/1~~

Ø14/1

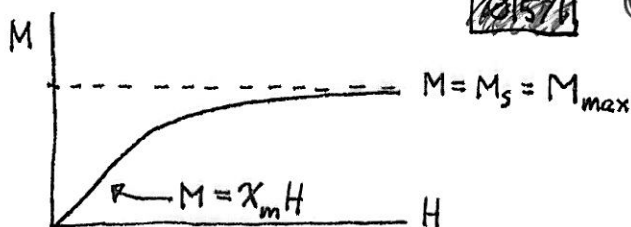
$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

Paramagnet: $\chi_m \sim 10^{-4}$ Ferromagnet: $\chi_m \sim 10^3$

Diamagnet: $\chi_m \sim -10^{-5}$

~~Ø15/1~~

Ø14/1



Elektrodynamikk

Induksjonsloven: $\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_m}{dt}$

↑ Lenz' lov

18/5

Mai 05/4

Des 03/2

Des 03/6

Mai 04/5

Des 02/5

Indusert elektrisk felt: $\mathcal{E} = \oint d\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$

$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ Faraday-Henrys lov

Gjensidig induktans: strøm I_1 i sløyfe 1 gir
 fluks Φ_2 gjennom (areal omsluttet av) sløyfe 2; $\Phi_2 = M_{21} I_1$;
 og omvendt, $\Phi_1 = M_{12} I_2$ ($M_{21} = M_{12} = M$)

Des 02/5

Gjensidig induksjon: $\dot{I}_1 \neq 0 \Rightarrow \dot{\Phi}_2 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{E}_2 = -\dot{\Phi}_2 = -M\dot{I}_1$,
 og omvendt, $\dot{I}_2 \neq 0 \Rightarrow \dot{\Phi}_1 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{E}_1 = -\dot{\Phi}_1 = -M\dot{I}_2$

Jun 07/4

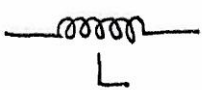
Selvinduktans: strøm I i sløyfe gir fluks Φ gjennom
 sløyfa; $\Phi = LI$

Mai 05/2

Des 02/5

Selvinduksjon: $\dot{I} \neq 0 \Rightarrow \dot{\Phi} \neq 0 \Rightarrow \mathcal{E} = -\dot{\Phi} = -L\dot{I}$

$[M] = [L] = H$ (henry)

Kretselement:  $\Delta V_L = -L\dot{I}$

RL-kretser: "Løses" med $I = \dot{Q}$, $\Delta V_R = RI$,
 $\Delta V_L = -L\dot{I}$ samt K1 og K2 (både
 med $\mathcal{E} = V_0$ og $\mathcal{E}(t) = V_0 \cos \omega t$)

Mai 06/4

Mai 05/5

Des 02/6

Mai 04/4

Tidskonstant: $\tau = L/R$

Energi lagret i magnetfelt, pr volumenhet: $u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$

$\Rightarrow u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 =$ energi pr volumenhet i
 elektromagnetisk felt, \vec{E} og \vec{B}

Ampere-Maxwells lov: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$

Maxwells ligninger:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q/\epsilon_0 \quad (\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0)$$

$$\left[\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_f \quad (\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f) \right]$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (\nabla \cdot \vec{B} = 0)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t})$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

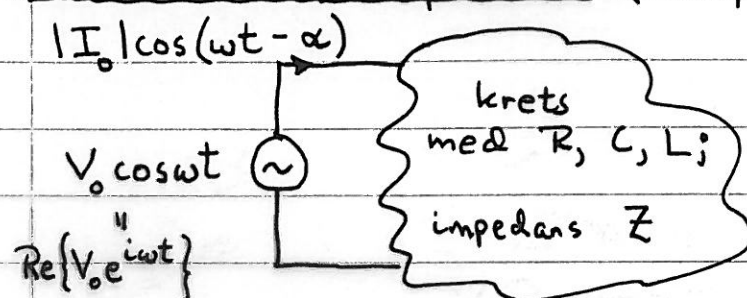
$$\left[\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f + \frac{d}{dt} \int \vec{D} \cdot d\vec{A} \quad (\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \right]$$

Grenseflatebetingelser: $(\Delta E_{\parallel} = 0, \Delta E_{\perp} = \sigma/\epsilon_0, \Delta \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \times \hat{n})$

Ø7, Ø13

$$\Delta \vec{E}_{\parallel} = 0, \Delta \vec{D}_{\perp} = \sigma_f, \Delta \vec{B}_{\perp} = 0, \Delta \vec{H}_{\parallel} = \vec{j}_f \times \hat{n}$$

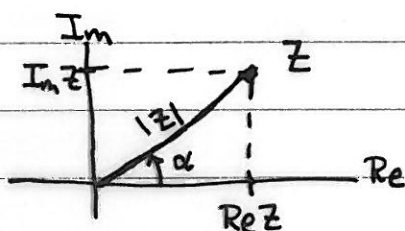
AC-kretser, impedans (kompleks regning)



$$V(t) = V_0 \cos \omega t \rightarrow V_0 e^{i\omega t}$$

$$I(t) = |I_0| \cos(\omega t - \alpha) \rightarrow |I_0| e^{i(\omega t - \alpha)} = I_0 e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow Z = V/I = \frac{V_0}{I_0} = \frac{V_0}{|I_0|} e^{i\alpha} = |Z| e^{i\alpha}$$



$$\text{Re } Z = |Z| \cos \alpha$$

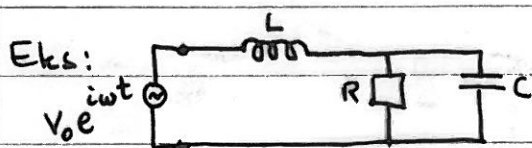
$$\text{Im } Z = |Z| \sin \alpha$$

$$\tan \alpha = \text{Im } Z / \text{Re } Z$$

$$Z_R = R; \quad Z_L = i\omega L = \omega L e^{i\pi/2}; \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-i\pi/2}$$

$$\text{Seriekobling: } Z = Z_1 + Z_2 + \dots = \sum_{j=1}^N Z_j$$

$$\text{Parallellkobling: } Z^{-1} = Z_1^{-1} + Z_2^{-1} + \dots = \sum_{j=1}^N Z_j^{-1}$$



$$Z = i\omega L + \left(\frac{1}{R} + i\omega C\right)^{-1} = \dots$$

$$\Rightarrow I_0 = V_0 / Z = \dots$$

(dvs: litt regning med komplekse tall...)