Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2007

Løsningsforslag til oppgaver som omhandler elektromagnetisk induksjon

Oppgave 1

a) Arealet som strømsløyfa omslutter er $L \cdot x$, og dette øker lineært med tiden, $dA/dt = Ldx/dt = Lv$. Omsluttet magnetisk fluks er $\phi = B \cdot A = BLx$, slik at indusert ems i strømsløyfa blir $\mathcal{E} = d\phi/dt = BLdx/dt = BLv$. Sløyfa har resistans R, så ifølge Ohms lov blir strømmen i kretsen

$$I = \mathcal{E}/R = BLv/R$$

Strømmen går mot klokka. Det innser vi fordi kraften på en positiv ladning q i metallstanga, $q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$, er rettet oppover. Alternativt, med Lenz' lov: Økende areal gir økende omsluttet magnetisk fluks inn i planet. Strømmen må da gå i en slik retning av fluksen på grunn av I peker ut av planet når vi er på innsiden av sløyfa.

b) Strømmen I går oppover i metallstanga, magnetfeltet peker inn i planet, så magnetsk kraft på strømmen I blir rettet mot venstre og er

$$F = ILB = B^2L^2v/R$$

c) Fra forrige punkt har vi altså at vi må trekke metallstanga bortover mot høyre med en kraft F for å opprettholde konstant hastighet. Slipper vi stanga, blir den eneste krafta som virker den (bremsende) magnetiske krafta mot venstre. Newtons 2. lov gir oss da følgende bevegelsesligning:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2L^2v}{R}$$

Dette er en 1. ordens differensialligning for $v(t)$. Løsning:

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{v} &= -\frac{B^2L^2}{mR}dt \\
\Rightarrow \ln v &= -\frac{B^2L^2}{mR}t + \ln k \\
\Rightarrow v(t) &= k\, e^{-B^2L^2t/mR} \\
\Rightarrow v(t) &= v_0\, e^{-B^2L^2t/mR}
\end{aligned}$$

der vi brukte initialbetingelsen $v(0) = v_0$.

d) Vi må regne ut hvor mye energi som tapes som varme i motstanden. Effekttapet er lik VI, der V er spenningsfallet over motstanden, dvs $V = RI$. Da effekttap er energitap pr tidsenhet, kan vi skrive

$$dW = P\,dt = VI\,dt = RI^2\,dt$$

for energien dW tapt på et tidsrom dt. Vi har i a funnet I uttrykt ved metallstangas hastighet v, så det er bare å sette inn. Totalt energitap må bli integralet av dW, dvs fra $t = 0$ til $t = \infty$:

$$\begin{aligned}
W &= \int dW \\
&= \int_0^\infty RI^2\, dt \\
&= \int_0^\infty R\left(\frac{BLv}{R}\right)^2 dt \\
&= \frac{B^2L^2v_0^2}{R}\int_0^\infty e^{-2B^2L^2t/mR}\, dt \\
&= \frac{B^2L^2v_0^2}{R}\Big|_0^\infty \left(-\frac{mR}{2B^2L^2}\right) e^{-2B^2L^2t/mR} \\
&= mv_0^2/2
\end{aligned}$$

som var det vi skulle vise.

Oppgave 4

a) Magnetfelt fra lang, rett strømførende leder er $B(x) = \mu_0 I/2\pi x$, der x er avstanden fra lederen. På planet som her er omsluttet av den kvadratiske sløyfa peker magnetfeltet rett ut av papirplanet. x-aksen er valgt oppover. Magnetfeltet og "flateelementvektoren" $d\boldsymbol{A}$ er parallelle, så vi har rett og slett $d\phi = B \cdot dA$ for fluks gjennom flateelement dA. Her velger vi horisontal stripe med bredde a og høyde dx som flateelement. Total fluks omsluttet av den kvadratiske sløyfa får vi ved å "summmere" opp slike striper, dvs ved å integrere fra $x = d$ til $x = d + a$. (Vi har valgt $x = 0$ der den rette lederen ligger.)

$$\begin{aligned}
\phi &= \int d\phi \\
&= \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} a\, dx \\
&= \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\Big|_d^{d+a} \ln x \\
&= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\frac{d+a}{d}
\end{aligned}$$

b) Indusert ems er lik den tidsderiverte av omsluttet magnetisk fluks:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= -\frac{d\phi}{dt} \\
&= -\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\frac{d}{dt}(\ln(d+a) - \ln d) \\
&= -\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\left(\frac{1}{d+a}\frac{dd}{dt} - \frac{1}{d}\frac{dd}{dt}\right) \\
&= \frac{\mu_0 I a v}{2\pi}\frac{a}{(d+a)d}
\end{aligned}$$

Her har vi brukt at $v = dd/dt$, og nå er ikke d en konstant avstand, men en avstand som øker lineært med tiden, f.eks. $d(t) = d_0 + vt$.
Fluksen opp av planet avtar med tiden. Da må indusert ems og tilhørende strøm bli *mot* klokka for å motvirke dette.

c) Hvis sløyfa trekkes mot høyre, endres ikke fluksen innenfor sløyfa. Dermed blir indusert ems lik null.

Løsningsforslag til oppgavene 1, 2 og 3 fra øving 12 høsten 2002:
http://web.phys.ntnu.no/~stovneng/SIF4012/losning12.pdf