Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2009

Elektromagnetiske bølger: Utledning av bølgeligning for elektrisk felt og magnetfelt med utgangspunkt i Maxwells ligninger.

Maxwells ligninger på integralform:

$$\varepsilon_0 \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = q$$

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt} \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

Maxwells ligninger på differensialform:

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

I fritt rom, dvs der $\rho = 0$ og $\boldsymbol{j} = 0$:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

Matematisk identitet:

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{G} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{G}) - \nabla^2 \boldsymbol{G}$$

for vilkårlig vektor $\boldsymbol{G}$. Her er første ledd på høyre side "grad div $\boldsymbol{G}$",

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{G}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}\right)\hat{x} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}\right)\hat{y} \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}\right)\hat{z} \end{aligned} \tag{1}$$

mens andre ledd er

$$\nabla^2 \boldsymbol{G} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{G}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{G}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{G}}{\partial z^2}$$

I fritt rom er både $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ og $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$, slik at

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = -\nabla^2 \boldsymbol{E}$$

og

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{B} = -\nabla^2 \boldsymbol{B}$$

Ta curl på begge sider av Faradays lov. Det gir:

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = -\nabla^2 \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{B})$$

Dernest bruker vi Ampere-Maxwells lov:

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

Kombinerer vi de to siste ligningene, får vi:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

En *generell* bølgeligning for en størrelse f som forplanter seg med hastighet v, f.eks. i x-retning, ser slik ut:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Følgelig kan vi konkludere med at Maxwells ligninger beskriver et elektrisk felt som forplanter seg i fritt rom med hastighet

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m/s } = c$$

dvs lyshastigheten i vakuum.

På tilsvarende vis kan vi utlede en bølgeligning for magnetfeltet: Start med å ta curl på begge sider av Ampere-Maxwells lov. Det gir:

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{B} = -\nabla^2 \boldsymbol{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{E})$$

Dernest bruker vi Faradays lov:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

Kombinerer vi de to siste ligningene, får vi:

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

Dvs samme bølgeligning som for $\boldsymbol{E}$!

Konklusjon: Maxwells ligninger beskriver *elektromagnetiske bølger* som forplanter seg i fritt rom med lyshastigheten $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$.