Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektromagnetisme
Vår 2009

Løsningsforslag til øving 10

Oppgave 1

Hele lederen kan deles opp i "sylinderrør" med indre radius r, ytre radius $r + dr$, og dermed tverrsnitt med areal

$$dA = 2\pi r\, dr$$

Strømmen i et slik rør er

$$dI = j \cdot dA = j_0\, e^{-r/R} \cdot 2\pi r\, dr$$

Total strøm I finner vi ved å integrere dI over lederens tverrsnitt, dvs ved å la r variere fra 0 til R:

$$\begin{aligned} I &= \int dI \\ &= \int_0^R j_0\, e^{-r/R} \cdot 2\pi r\, dr \\ &= 2\pi j_0\, R^2 \int_0^1 x\, e^{-x}\, dx \\ &= 2\pi j_0\, R^2 \left(1 - \frac{2}{e}\right) \end{aligned}$$

Her har vi substituert $x = r/R$ slik at $dr = R\, dx$ og $r = R\, x$. Integralet er løst med delvis integrasjon.

Oppgave 2

1. Hele området mellom $r = a$ og $r = b$ kan oppfattes som en seriekobling av motstander dR, der hver motstand er et tynt kuleskall med radius r og tykkelse dr:

$$dR = \frac{\rho\, dr}{4\pi r^2}$$

Hele motstanden finner vi ved å legge sammen enkeltmotstandene, dvs ved å integrere fra $r = a$ til $r = b$:

$$\begin{aligned} R &= \int dR \\ &= \int_a^b \frac{\rho\, dr}{4\pi r^2} \\ &= \frac{\rho}{4\pi} |_a^b \left(-\frac{1}{r}\right) \\ &= \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \end{aligned}$$

2. Det oppgitte uttrykket for strømstyrken I viser at vi her kan bruke Gauss' lov for det elektriske feltet til å bestemme I:

$$I = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Vi må her forutsette at ladningen som kommer inn på den innerste lederen umiddelbart fordeler seg jevnt over kuleflaten ved $r = a$ før den starter sin vandring gjennom materialet mellom $r = a$ og $r = b$.
Potensialforskjellen mellom indre og ytre lederskall bestemmes enkelt ettersom vi kjenner feltet $\boldsymbol{E}$:

$$\begin{aligned}
\Delta V &= V_a - V_b \\
&= -\int_b^a E(r)\, dr \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} |_b^a \frac{1}{r} \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)
\end{aligned}$$

Av disse uttrykkene følger det at motstanden er

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Oppgave 3

a) Dette systemet kan oppfattes som en seriekobling av tre motstander: de to 60 cm lange Cu–ledningene og motstanden $R = 20\ \Omega$. Motstanden til Cu–ledningene blir

$$R_C = \frac{l}{\sigma A} = \cdot \frac{1.20\text{m}}{5.8 \cdot 10^7\ \Omega^{-1}\text{m}^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-6}\text{m}^2} = 0.01\ \Omega$$

Samme strømstyrke I går gjennom hele systemet. Den er

$$I = \frac{V}{R + R_C} = \frac{1.5\ \text{V}}{20.01\ \Omega} = 0.07496\ \text{A} \simeq 0.075\ \text{A}$$

ifølge Ohms lov. Vi får dermed spenningsfallene

$$V_R = RI = 20\ \Omega \cdot 0.075\ \text{A} \simeq 1.5\ \text{V}$$

over motstanden R og

$$V_C = R_C I = 0.01\ \Omega \cdot 0.075\ \text{A} = 0.00075\ \text{V}$$

over de to Cu–ledningene tilsammen. Konklusjon: Neglisjerbart spenningsfall i de to Cu–ledningene.

b) Strømstyrken I beregnet vi under punkt *a*). Utviklet effekt i motstanden R blir

$$P = V_R I = 1.5\ \text{V} \cdot 0.075\ \text{A} = 0.1125\ \text{W} \simeq 0.11\ \text{W}$$

c) Her må vi bestemme tettheten av frie elektroner n. Deretter kan vi bruke $I = j \cdot A = nevA$ til å beregne midlere driftshastighet v. I Cu har vi 8960 kg pr m^3. Dette tilsvarer 8960/0.06354 mol = 141014 mol = 141014 $\cdot 6.02 \cdot 10^{23}$ atomer = $8.49 \cdot 10^{28}$ atomer, og da like mange frie elektroner, med antagelsen ett fritt elektron pr atom Cu. Midlere driftshastighet blir

$$v = \frac{I}{neA} = \frac{0.075}{8.49 \cdot 10^{28} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 2.76 \cdot 10^{-6} \text{ m/s} = 2.76 \mu\text{m/s}$$

Midlere termiske hastighet for elektronene anslår vi ved å sette kinetisk energi lik termisk energi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{3}{2}k_BT \\ \Rightarrow v &= \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} \simeq 10^5 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Her er $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K Boltzmanns konstant. Vi ser at midlere driftshastighet er ca 11 størrelsesordener mindre enn midlere termiske hastighet. Det tar altså mange timer for et gitt elektron å komme seg fra den ene til den andre siden av systemet vårt!

Oppgave 4

a) Først er det en fordel å innse at vi her har [en parallellkobling av R_1, R_2 og R_3] i serie med [en parallellkobling av R_4 og $R_0 = 0$] i serie med [R_5]. Motstanden R_4 er med andre ord "kortsluttet", slik at det ikke vil gå noen strøm gjennom R_4. (Sagt på en annen måte: Vi har samme potensial på hver side av R_4, men da kan det heller ikke gå noen strøm gjennom denne motstanden.) Total motstand blir dermed

$$R = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} + R_5$$

b) Det er vel klart at den totale strømmen I må bli den samme som strømmen I_5 gjennom R_5. Dessuten er det klart at I må fordele seg på de 3 strømmene gjennom R_1, R_2 og R_3: $I = I_1 + I_2 + I_3$. Vi har i punkt a) allerede konkludert med at det ikke vil gå noen strøm gjennom R_4: $I_4 = 0$.
Spenningsfallet over de tre øverste motstandene er det samme:

$$V' = R_1I_1 = R_2I_2 = R_3I_3$$

Spenningsfallet over R_5 blir

$$V'' = R_5I_5 = R_5I = R_5\frac{\mathcal{E}}{R}$$

Disse to må tilsammen utgjøre den påtrykte spenningen:

$$\mathcal{E} = V' + V''$$

Dermed er

$$V' = \mathcal{E} - V'' = \mathcal{E} - R_5 \frac{\mathcal{E}}{R} = \mathcal{E}\left(1 - \frac{R_5}{R}\right)$$

Dessuten:

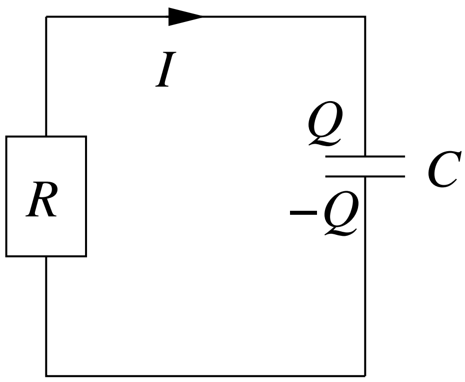
$$I_1 = \frac{V'}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{V'}{R_2}$$

$$I_3 = \frac{V'}{R_3}$$

Oppgave 5

Kondensatoren vil lades ut ved at elektroner strømmer fra den negativt ladete siden ("platen") gjennom motstanden til den positivt ladete platen. Med andre ord, en positiv strøm vil gå gjennom R, fra positivt ladet plate.



I figuren er I tegnet med retning mot positiv plate, til tross for at vi ble enige om at positiv I går andre veien. Det skyldes at jeg foretrekker å beholde sammenhengen

$$I = +\frac{dQ}{dt}$$

(og ikke med omvendt fortegn). Kirchhoffs spenningsregel gir

$$-RI - \frac{Q}{C} = 0$$

dvs

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC}$$

Integrasjon på begge sider gir

$$Q = ke^{-t/RC}$$

og startbetingelsen $Q(0) = Q_0$ fastlegger integrasjonskonstanten k:

$$Q_0 = ke^0 = k$$

slik at

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$$

Strømmen blir dermed

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}$$

Som ventet med et minustegn, slik at positiv I går mot klokka i figuren ovenfor.