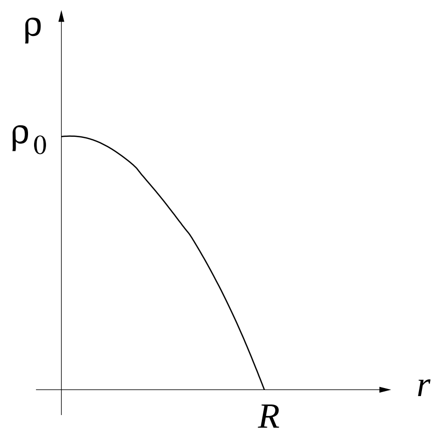
Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektromagnetisme
Vår 2009

Løsningsforslag til øving 6

Oppgave 1

a) Skisse av ladningstettheten $\rho(r)$:



Et lite volumelement dV i posisjon $\boldsymbol{r}$ inneholder en ladning $dq = \rho(\boldsymbol{r})\,dV$. Her har vi kulesymmetrisk ladningsfordeling, så vi kan bruke et tynt kuleskall med radius r og tykkelse dr som volumelement: $dV = 4\pi r^2\,dr$. Kulas totale ladning får vi ved å summere opp ladningen i slike kuleskall, dvs vi må integrere fra $r = 0$ til $r = R$:

$$\begin{aligned}
Q &= \int_{r<R} \rho\,dV \\
&= 4\pi\rho_0 \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r^2\,dr \\
&= 4\pi\rho_0|_0^R \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2}\right) \\
&= 4\pi\rho_0 R^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \\
&= \frac{8\pi\rho_0 R^3}{15}
\end{aligned}$$

b) Med kulesymmetrisk ladningsfordeling velger vi kuleflate med radius r som gaussflate. Integralet i Gauss' lov blir da

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{A} = E(r)\cdot 4\pi r^2$$

Dersom $r > R$, er hele ladningen $Q = 8\pi\rho_0 R^3/15$ innenfor gaussflaten. Da blir det elektriske feltet

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{2\rho_0 R^3}{15\varepsilon_0 r^2}$$

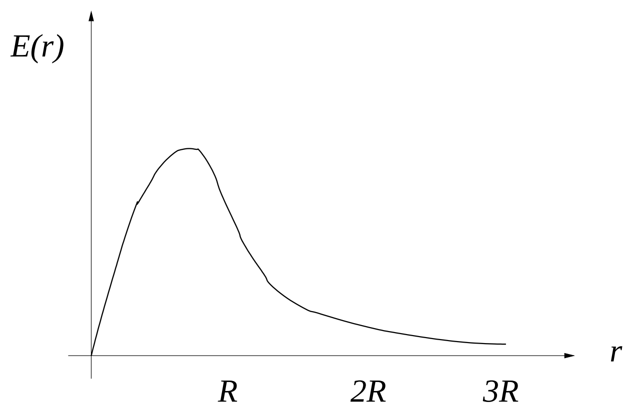
Dersom $r < R$, er ladningen innenfor gaussflaten lik

$$
\begin{aligned}
q_{\text{in}}(r) &= \int_{r'<r} \rho(r')\, dV \\
&= 4\pi\rho_0 \int_0^r \left(1 - \frac{r'^2}{R^2}\right) r'^2\, dr' \\
&= 4\pi\rho_0 |_0^r \left(\frac{r'^3}{3} - \frac{r'^5}{5R^2}\right) \\
&= 4\pi\rho_0 \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2}\right)
\end{aligned}
$$

slik at det elektriske feltet blir

$$E(r) = \frac{q_{\text{in}}(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5R^2}\right)$$

Skisse av $E(r)$:



Oppgave 2

Her utgjør de to kulene og metalltråden i mellom en sammenhengende elektrisk leder. Det betyr at vi har samme verdi på det elektriske potensialet på de to kulene. Siden kulene er langt fra hverandre, har vi kulesymmetrisk ladningsfordeling på overflaten av hver av kulene. Hvis kule 1 har ladning Q_1, blir potensialet på denne kula $V_1 = Q_1/4\pi\varepsilon_0 R_1$. La oss vise det: Vi vet at det elektriske feltet utenfor kula er det samme som om hele ladningen Q_1 var lokalisert i kulas sentrum, dvs $E_1(r) = Q_1/4\pi\varepsilon_0 r^2$, rettet radielt utover (dersom $Q_1 > 0$). Med valget $V_1 = 0$ uendelig langt borte kan vi bestemme potensialet på kula ved å integrere det elektriske feltet:

$$V_1(R_1) = -\int_\infty^{R_1} E_1(r)\, dr = -\int_\infty^{R_1} \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

Og med ladning Q_2 på den andre kula blir potensialet der

$$V_2(R_2) = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

Likhet mellom disse to potensialverdiene resulterer i

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Samtidig må vi selvsagt ha $Q_1 + Q_2 = Q$, slik at

$$Q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} Q \quad , \quad Q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} Q$$

Den elektriske feltstyrken på overflaten av kule j ($j = 1, 2$) er

$$E_j(R_j) = \frac{\sigma_j}{\varepsilon_0} = \frac{Q_j}{4\pi\varepsilon_0 R_j^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_j (R_1 + R_2)}$$

Altså: Mest ladning på kula med størst radius. Størst elektrisk feltstyrke på kula med minst radius.

Oppgave 3

a) Vi vet at vi får (tilnærmet) uniformt elektrisk felt mellom to (tilnærmet uendelig) store parallelle plater med uniformt fordelt ladning med motsatt fortegn. Følgelig (med V = potensialforskjellen mellom platene):

$$E = \frac{V}{d} = \frac{96}{0.01} = 9600 \text{ V/m}$$

I forelesningene viste vi at et stort ladet plan med ladning σ pr flateenhet resulterte i et elektrisk felt $\sigma/2\varepsilon_0$, og at mellom to store ladede plan med ladning hhv σ og $-\sigma$ pr flateenhet blir det elektriske feltet σ/ε_0. Dermed:

$$Q = \sigma A = \varepsilon_0 E A = 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 9600 \cdot 0.25 = 2.12 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

Eller, med prefikset n for "nano", dvs 10^{-9}: $Q = 21.2$ nC.

b) Uten vann var potensialforskjellen 96 V. Med vann mellom platene har den falt til 1.2 V. Dette skyldes innretting av molekylære dipoler i vannet, og dermed en indusert ladning $-\sigma_i$ pr flateenhet på vannets overflate ved den positive metallplaten, og en indusert ladning σ_i pr flateenhet på vannets overflate ved den negative metallplaten. Som vist i forelesningene, tilsvarer polariseringen i vannet nettopp σ_i. Den elektriske feltstyrken er redusert fra 9600 V/m til 120 V/m. Det betyr at den induserte flateladningen $\pm\sigma_i$ har skapt et elektrisk felt $E_i = \sigma_i/\varepsilon_0 = 9480$ V/m. Med andre ord,

$$P = \sigma_i = \varepsilon_0 E_i = 8.39 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}^2$$

Maksimal teoretisk polarisering i vann er:

$$P_{\text{max}} = \frac{N_A \cdot p_{\text{vann}}}{v_m} = \frac{6.02 \cdot 10^{23} \cdot 6.2 \cdot 10^{-30}}{18 \cdot 10^{-6}} \simeq 0.21 \text{ C/m}^2$$

Her er $N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$ det såkalte Avogadros tall, dvs antall molekyler i ett mol og $v_m = 18 \cdot 10^{-6}$ m^3 det molare volumet for vann.

Vi ser at polariseringen P bare utgjør en ganske liten del av maksimal teoretisk polarisering $P_{\max}$, nærmere bestemt

$$P/P_{\max} \simeq 4 \cdot 10^{-7}$$

Det er med andre ord ikke snakk om en "oppmarsjering" av vannmolekyler på rekke og rad, men en liten *tendens* til innordning av elektriske dipoler langs det ytre, påtrykte elektriske feltet. Det er kanskje ikke så vanskelig å forestille seg at graden av innretting av dipoler vil avhenge av temperaturen: Jo høyere temperatur, jo mere uorden, og dermed mindre polarisering.

Oppgave 4

De to smale ringene (se figuren i oppgaveteksten) i innbyrdes avstand $\boldsymbol{d} = 2z\,\hat{z} = 2R\cos\theta\,\hat{z}$ har ladning $\pm dq = \pm\sigma dA = \pm\sigma \cdot (2\pi\rho) \cdot (Rd\theta) = \pm\sigma \cdot (2\pi R\sin\theta) \cdot (Rd\theta)$. Kulas dipolmoment blir dermed:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p} &= \int d\boldsymbol{p} \\
&= \int \boldsymbol{d}\,dq \\
&= \int \boldsymbol{d}\,\sigma\,dA \\
&= \int_0^{\pi/2} 2z\hat{z}\sigma \cdot 2\pi R^2 \sin\theta d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} 2R\cos\theta\hat{z}\sigma \cdot 2\pi R^2 \sin\theta d\theta \\
&= 4\pi R^3\sigma\hat{z} \int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta d\theta \\
&= 4\pi R^3\sigma\hat{z}\,|_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin^2\theta \\
&= 2\pi R^3\sigma\hat{z}
\end{aligned}$$

Legg merke til at vi gjerne har to mulige (ekvivalente) strategier når dipolmomentet til et system (her: med kontinuerlig ladningsfordeling) skal beregnes. Vi skriver $d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{r}\,dq$ og 1) lar $\boldsymbol{r}$ angi posisjonen til ladningselementet dq og integrerer over *hele* ladningsfordelingen, eller 2) lar $\boldsymbol{r}$ angi avstandsvektoren mellom "symmetrisk lokaliserte" ladningselementer $-dq$ og $+dq$ og integrerer kun over *halve* ladningsfordelingen (typisk den positive halvdelen). I denne oppgaven fungerte strategi 2) fint, siden vi har en "passende" symmetri. Dersom vi ikke har en passende symmetri, må vi bruke strategi 1).