Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektromagnetisme
Vår 2009

Løsningsforslag til øving 7

Oppgave 1

I denne oppgaven har vi en *fast* potensialforskjell V_0 mellom de to metallplatene. La oss først se kvalitativt på hva som skjer.
Begge dielektrika blir polarisert i det elektriske feltet fra de to metallplatene. I (a) blir venstre halvdel mindre polarisert enn høyre halvdel, i og med at høyre halvdel har større relativ permittivitet. Nettoresultatet blir en indusert overflateladning på hver side av dielektrikumet, her negativ øverst og positiv nederst, ettersom øverste og nederste metallplate har hhv positiv og negativ ladning (øverste plate har høyere potensial enn nederste plate). Dersom hele volumet mellom platene hadde vært fylt med ett og samme type medium, ville fri ladning på metallplatene ha vært *jevnt fordelt* over hele metallplatenes areal. Dette er ikke tilfelle her! Ettersom høyre halvdel polariseres mer enn venstre halvdel, vil høyre halvdel få mer indusert ladning på dielektrikumets overflate enn venstre halvdel. Dersom fri ladning på metallplatene nå var jevnt fordelt, ville ikke den elektriske feltstyrken være den samme på høyre og venstre side, og da kunne heller ikke potensialforskjellen mellom metallplatene være den samme på høyre og venstre side. Men det *må* den være, ettersom en gitt metallplate er et ekvipotensial! "Likevekten" gjenopprettes ved at ekstra fri ladning strømmer inn i høyre halvdel av metallplatene, inntil *total* ladning på høyre og venstre side er like stor. La oss kalle (tettheten av) fri ladning hhv σ_{af}^v og σ_{af}^h til venstre og høyre, og indusert (bundet) ladning σ_{ai}^v og σ_{ai}^h til høyre. Vi lar dessuten notasjonen være slik at alle σ er *positive*. Da må vi altså ha

$$\sigma_{af}^h - \sigma_{ai}^h = \sigma_{af}^v - \sigma_{ai}^v$$

for å ha like mye total ladning til høyre og til venstre.
I (b) får vi også indusert overflateladning på begge sider av begge dielektrika. Dielektrikumet nederst har størst relativ permittivitet. Det betyr at vi får sterkere polarisering i dette området enn i den øvre halvdelen. Følgelig må indusert ladning oppe, σ_{bi}^o, være mindre enn indusert ladning nede, σ_{bi}^n. Fortegnet på de induserte ladningene må være negativt oppe ved øverste metallplate, positivt nede ved nederste metallplate, og følgelig positivt på nedre overflate av øvre dielektrikum, og negativt på øvre overflate av nedre dielektrikum. I dette tilfellet har vi ingen forskjell mellom høyre og venstre, så fri ladning er nå jevnt fordelt i metallplatene. Videre må veiintegralet av det elektriske feltet fra den ene til den andre plata fremdeles ha verdien V_0. Med kun en type medium mellom platene ville vi hatt et uniformt elektrisk felt $E_0 = V_0/d$. Nå har vi konkludert med sterkest polarisering i det nederste laget. Derfor må det elektriske feltet, E_b^n, her være svakere enn feltet E_b^o i det øverste laget. Det er klart at E_b^o må være større enn V_0/d og at E_b^n må være mindre enn V_0/d, og slik at

$$E_b^o \cdot \frac{d}{2} + E_b^n \cdot \frac{d}{2} = V_0$$

Hvis vi sammenligner med forholdene uten noe dielektrikum til stede i det hele tatt, må det ha strømmet til ekstra fri ladning til metallplatene for å opprettholde den samme potensialforskjellen V_0 mellom platene. Dette sørger spenningskilden for.

Da har vi vel stort sett fått "kartlagt situasjonen", og dessuten etablert både notasjon og diverse sammenhenger. I tillegg til dette vet vi at (se forelesningene) elektrisk forskyvning D er lik tettheten av fri ladning, og at elektrisk polarisering P er lik tettheten av indusert ladning. Endelig har vi sammenhengene $D = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon E$. For våre system kan vi her uten fare sløyfe vektortegn: Alle vektorer $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{P}$ peker *nedover*. Vi har nå tilstrekkelig kunnskap til å regne ut alle interessante størrelser for de to kondensatorene.

(a) Konstant elektrisk felt E_a mellom platene:

$$E_a = \frac{V_0}{d}$$

Elektrisk forskyvning:

$$D_a^h = \varepsilon_2 E_a = \frac{4\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 V_0}{d}$$

til høyre, og

$$D_a^v = \varepsilon_1 E_a = \frac{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 V_0}{d}$$

til venstre. Dette blir da også tettheten av fri ladning til høyre og venstre:

$$\begin{aligned} \sigma_{af}^h &= D_a^h \\ \sigma_{af}^v &= D_a^v \end{aligned}$$

Polarisering og indusert ladning:

$$P_a^h = \sigma_{ai}^h = \chi_1 \varepsilon_0 E_a = \frac{(\varepsilon_{r1} - 1)\varepsilon_0 V_0}{d}$$

$$P_a^v = \sigma_{ai}^v = \chi_2 \varepsilon_0 E_a = \frac{(4\varepsilon_{r1} - 1)\varepsilon_0 V_0}{d}$$

Kapasitans:

$$C_a = \frac{Q_a}{V_0} = \frac{(\sigma_{af}^h + \sigma_{af}^v) \cdot A/2}{V_0} = \frac{5\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 A}{2d}$$

(b) Her har vi konstant elektrisk forskyvning mellom platene:

$$D_b^o = D_b^n = D_b = \sigma_{bf}^o = \sigma_{bf}^n = \sigma_{bf}$$

Vi vet ikke umiddelbart hva fri ladning σ_{bf} på metallplatene er, men vi kjenner sammenhengen mellom D og E i de to sjiktene, og dessuten sammenhengen mellom E og V_0. Alt i alt:

$$V_0 = \frac{d}{2}\left(E_b^o + E_b^n\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{d}{2}\left(\frac{D_b^o}{\varepsilon_1} + \frac{D_b^n}{\varepsilon_2}\right) \\
&= \frac{D_b d}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{1}{4\varepsilon_{r1}}\right) \\
\Rightarrow D_b &= \frac{8\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 V_0}{5d}
\end{aligned}
$$

Elektrisk felt oppe:

$$E_b^o = \frac{D_b}{\varepsilon_1} = \frac{8V_0}{5d}$$

Elektrisk felt nede:

$$E_b^n = \frac{D_b}{\varepsilon_2} = \frac{2V_0}{5d}$$

Polarisering, og dermed også indusert ladning, oppe:

$$P_b^o = \frac{8(\varepsilon_{r1} - 1)\varepsilon_0 V_0}{5d}$$

Polarisering, og dermed også indusert ladning, nede:

$$P_b^n = \frac{2(4\varepsilon_{r1} - 1)\varepsilon_0 V_0}{5d}$$

Kapasitans:

$$C_b = \frac{Q_b}{V_0} = \frac{\sigma_{bf} \cdot A}{V_0} = \frac{8\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 A}{5d}$$

For parallellkobling av to kapasitanser C_1 og C_2 har vi utledet at ekvivalent kapasitans er

$$C = C_1 + C_2$$

En kondensator med plateavstand d og plateareal $A/2$ som er fylt med dielektrikum med relativ permittivitet ε_r har (fra forelesningene) en kapasitans $\varepsilon_r\varepsilon_0 A/2d$. En parallellkobling av to slike, den ene med relativ permittivitet ε_{r1} og den andre med relativ permittivitet $4\varepsilon_{r1}$, tilsvarer da en ekvivalent kapasitans

$$C = \frac{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 A}{2d} + \frac{4\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 A}{2d} = \frac{5\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 A}{2d}$$

som er nettopp det vi fant ved å regne i detalj på kondensator (a).

For seriekobling av to kapasitanser C_1 og C_2 har vi utledet at ekvivalent kapasitans er

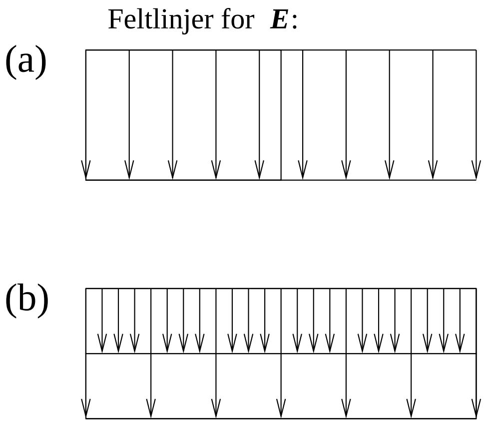
$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1}$$

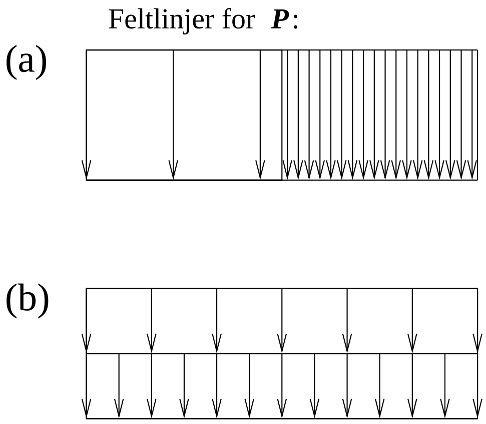
En kondensator med plateavstand $d/2$ og plateareal A som er fylt med dielektrikum med relativ permittivitet ε_r har (fra forelesningene) en kapasitans $2\varepsilon_r\varepsilon_0 A/d$. En seriekobling av to slike, den ene med relativ permittivitet ε_{r1} og den andre med relativ permittivitet $4\varepsilon_{r1}$, tilsvarer da en ekvivalent kapasitans

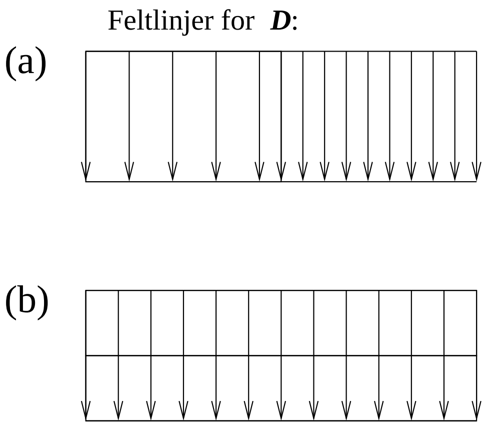
$$C = \left(\frac{d}{2\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 A} + \frac{d}{8\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 A} \right)^{-1} = \frac{8\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 A}{5d}$$

som er nettopp det vi fant ved å regne i detalj på kondensator (b).

Feltlinjer for E, P og D:







Tallverdier:

(a)

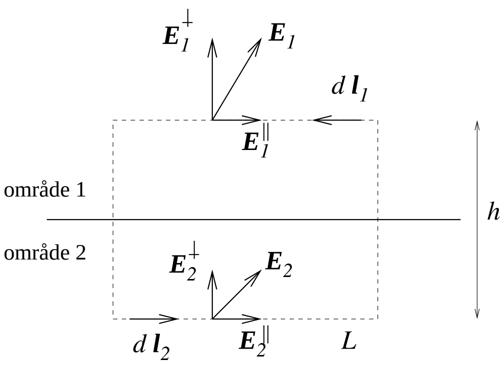
$$\begin{aligned}
E_a &= V_0/d = 10^5 \text{ V/m} \\
D_a^h &= \sigma_{af}^h = \frac{4\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 V_0}{d} = 7.08\ \mu\text{C/m}^2 \\
D_a^v &= \sigma_{af}^v = \frac{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 V_0}{d} = 1.77\ \mu\text{C/m}^2 \\
P_a^h &= \sigma_{ai}^h = \frac{(\varepsilon_{r1}-1)\varepsilon_0 V_0}{d} = 6.20\ \mu\text{C/m}^2 \\
P_a^v &= \sigma_{ai}^v = \frac{(4\varepsilon_{r1}-1)\varepsilon_0 V_0}{d} = 0.89\ \mu\text{C/m}^2 \\
C_a &= \frac{5\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 A}{2d} = 44 \text{ pF}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
D_b &= \sigma_{bf} = \frac{8\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 V_0}{5d} = 2.83\ \mu\text{C/m}^2 \\
E_b^o &= \frac{8V_0}{5d} = 1.6 \cdot 10^5 \text{ V/m} \\
E_b^n &= \frac{2V_0}{5d} = 0.4 \cdot 10^5 \text{ V/m} \\
P_b^o &= \sigma_{bi}^o = \frac{8(\varepsilon_{r1}-1)\varepsilon_0 V_0}{5d} = 1.42\ \mu\text{C/m}^2 \\
P_b^n &= \sigma_{bi}^n = \frac{2(4\varepsilon_{r1}-1)\varepsilon_0 V_0}{5d} = 2.48\ \mu\text{C/m}^2 \\
C_b &= \frac{8\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 A}{5d} = 28 \text{ pF}
\end{aligned}$$

Oppgave 2

Vi ser først på komponenten av $\boldsymbol{E}$ tangentielt med grenseflaten. Den ene av Maxwells ligninger sier at kurveintegralet av $\boldsymbol{E}$ rundt en lukket kurve skal være lik null. Vi bruker tipsene i oppgaveteksten og integrerer rundt den rektangulære kurven vist i figuren:



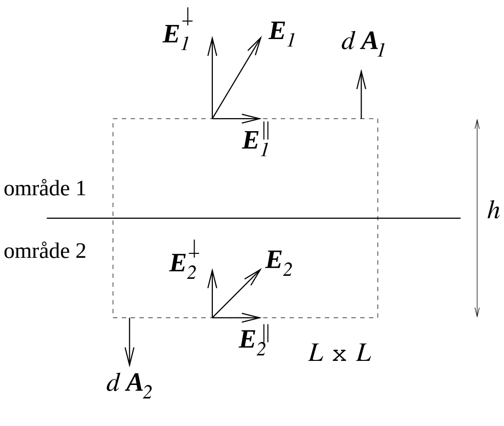
Når vi lar "høyden" h gå mot null, får vi null bidrag til kurveintegralet fra de to vertikale bitene av rektangelet. Bidraget fra den horisontale biten i område 2 blir $E_2^{||}L$ ettersom feltet her peker samme vei som veielementet $d\boldsymbol{l}_2$. Bidraget fra den horisontale biten i område 1 blir $-E_1^{||}L$, for her peker feltet motsatt vei av $d\boldsymbol{l}_1$. Det totale bidraget skal ifølge Maxwell forsvinne, slik at

$$E_2^{||}L - E_1^{||}L = 0$$

dvs

$$E_2^{||} = E_1^{||}$$

Konklusjon: Tangentialkomponenten av $\boldsymbol{E}$ er kontinuerlig når vi krysser en grenseflate.
I neste omgang ser vi på komponenten av $\boldsymbol{E}$ normalt på grenseflaten. Den andre Maxwell-ligningen, dvs Gauss' lov, sier at flateintegralet av $\boldsymbol{E}$ over en lukket flate skal være lik netto ladning innenfor den lukkede flaten, dividert med konstanten ε_0.



Igjen er vi interessert i hva som skjer idet vi krysser grenseflaten, så vi lar høyden av pilleesken h gå mot null. Det betyr at arealet av 4 av de 6 sideflatene på den valgte gaussflaten går mot null, så de eneste bidragene til flateintegralet i Gauss' lov (dvs til den elektriske fluksen gjennom gaussflaten) blir fra "topplokket" i område 1 og fra "bunnen" i område 2. Førstnevnte bidrag blir $E_1^{\perp}A$ ($A = L \times L$), ettersom normalkomponenten av feltet peker i samme retning som flatenormalen $d\boldsymbol{A}_1$. Sistnevnte bidrag blir $-E_2^{\perp}A$, for her peker feltets normalkomponent i motsatt retning av flatenormalen $d\boldsymbol{A}_2$. Netto ladning innenfor gaussflaten er

$$q_{\text{in}} = \sigma A$$

Gauss' lov gir dermed

$$E_1^{\perp}A - E_2^{\perp}A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

dvs

$$E_1^{\perp} - E_2^{\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Konklusjon: Normalkomponenten av $\boldsymbol{E}$ er diskontinuerlig når vi krysser en grenseflate med nettoladning forskjellig fra null.

Kommentar 1: I utledningen ovenfor har jeg valgt bestemte retninger for det elektriske feltet like over og like under grenseflaten. I utgangspunktet kjenner jeg selvsagt ikke disse retningene og kunne f.eks. like gjerne ha prøvd meg med helt motsatt retning på vektoren $\boldsymbol{E}_1$. Konklusjonene hadde imidlertid blitt de samme! Under betraktning av f.eks. tangentialkomponenten ville begge bidragene til kurveintegralet da blitt positive, slik at resultatet hadde blitt

$$E_2^{\parallel} = -E_1^{\parallel}$$

Men her betyr jo minustegnet nettopp at valget av *relativ retning* på $\boldsymbol{E}_1$ og $\boldsymbol{E}_2$ da hadde blitt "feil", dvs *gitt* en viss retning på $\boldsymbol{E}_2$, så må $\boldsymbol{E}_1$ peke i en slik retning at tangentialkomponenten av $\boldsymbol{E}$ blir den samme på de to sidene av grenseflaten.
Samme argumentasjon gjør seg gjeldende ved betraktning av normalkomponenten av feltet.
Kommentar 2: Egentlig kan alt ovenstående sammenfattes i følgende enkle løsning: Bidraget til det totale elektriske feltet fra ladningen σ i flaten er $\sigma/2\varepsilon_0$, rettet vinkelrett bort fra flaten på begge sider. "Resten av verden" bidrar med et felt $\boldsymbol{E}_{\text{ytre}}$ i tillegg til feltet fra σ, men $\boldsymbol{E}_{\text{ytre}}$ må være kontinuerlig når vi krysser flaten. Da må det totale feltet ha en diskontinuerlig normalkomponent, med diskontinuitet $2 \cdot \sigma/2\varepsilon_0 = \sigma/\varepsilon_0$, mens tangentialkomponenten må være kontinuerlig.