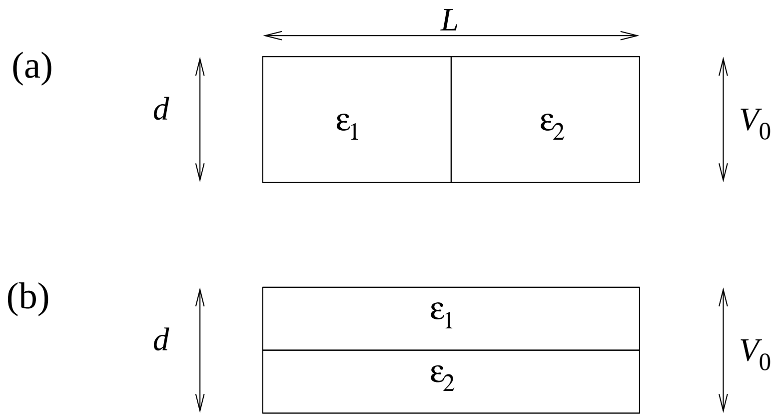
Øving 7

Veiledning: Mandag 2. og fredag 6. mars.
Innleveringsfrist: Fredag 6. mars kl 1200.

Oppgave 1

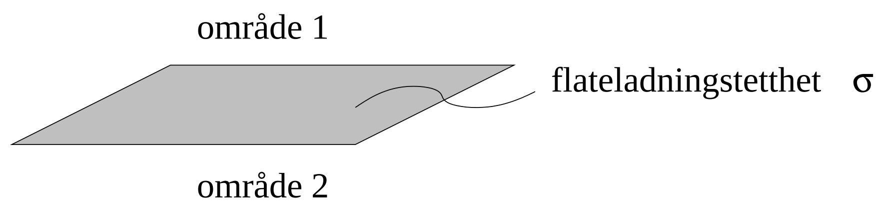


I denne oppgaven skal vi se på parallellplatekondensatorer satt sammen av to metallplater i innbyrdes avstand d og med plateareal $A = L^2$. Du kan anta at $L \gg d$, slik at vi kan se bort fra randeffekter og anvende resultater utledet for uendelig store plater. I hvert tilfelle er metallplatene koblet til en spenningskilde slik at potensialforskjellen mellom platene holdes fast på V_0, med høyest potensial på den øverste platen. Rommet mellom platene er fylt med to ulike dielektrika, som vist i figuren over. Disse har relative permittiviteter hhv ε_{r1} og $\varepsilon_{r2} = 4\varepsilon_{r1}$.
For hver av de to kondensatorene (a) og (b) skal du bestemme $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{P}$ og $\boldsymbol{D}$ i rommet mellom metallplatene. Skisser feltlinjer for de tre vektorfeltene. Bestem videre ladning pr flateenhet på de ulike overflatene. (Dvs: *fri* ladning σ_f pr flateenhet på metallplatene og *indusert* (bundet) ladning σ_i pr flateenhet på overflaten av de ulike dielektriske lagene.)
Finn kapasitansene C_a og C_b til hhv kondensator (a) og (b), uttrykt ved A, d og ε_{r1}. Bruk formelen for parallellkobling av kapasitanser og vis at C_a tilsvarer en parallellkobling av to kondensatorer med plateavstand d og plateareal $A/2$, fylt med dielektrika med relativ permittivitet hhv ε_{r1} og $\varepsilon_{r2} = 4\varepsilon_{r1}$. Tilsvarende, bruk formelen for seriekobling av kapasitanser og vis at C_b tilsvarer en seriekobling av to kondensatorer med plateavstand $d/2$ og plateareal A, fylt med dielektrika med relativ permittivitet hhv ε_{r1} og $\varepsilon_{r2} = 4\varepsilon_{r1}$.
Til slutt: Anta at $d = 1$ mm, $A = 10$ cm^2, $V_0 = 100$ V og $\varepsilon_{r1} = 2$, og regn ut tallverdier for de ulike størrelsene som er involvert (σ_f, σ_i, E, P, D, C).

Noen tallsvar: $E_a = 10^5$ V/m, $D_b = \sigma_{fb} \simeq 2.8\ \mu$C/m^2, $C_a \simeq 44$ pF, $C_b \simeq 28$ pF

Oppgave 2: Grenseflatebetingelser for $\boldsymbol{E}$ (og $\boldsymbol{D}$)

Vi skal her se nærmere på hvordan det elektriske feltet "oppfører seg" når vi krysser en *grenseflate* med ladning σ pr flateenhet. Med grenseflate mener vi ikke annet enn en flate som deler rommet i områdene 1 ("over") og 2 ("under"):



Oppgaven går i korthet ut på å vise at det elektriske feltet er *diskontinuerlig* når vi krysser en slik grenseflate med elektrisk ladning:

$$\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n} \qquad (*)$$

Her er $\boldsymbol{E}_1$ feltet i område 1 like over flaten, $\boldsymbol{E}_2$ tilsvarende i område 2 like under flaten, mens $\hat{n}$ er en flatenormal (enhetsvektor) med retning oppover.

Kommentarer og tips:
Dette kan være et flatt plan, men det kan f.eks. også være en liten bit av en kuleflate: Er vi tilstrekkelig nær en kuleflate, ser også den flat ut.
Vi tenker oss dessuten at det ikke er noe netto ladning "like over" eller "like under" den angitte flaten. (Men "andre steder" kan det godt være netto ladning.) Det betyr at vi ser en *diskontinuitet* i elektrisk ladning når vi "spaserer" fra område 2 gjennom flaten og inn i område 1. (Men *i flaten* har vi en kontinuerlig flateladning σ.)
Du ser at ligningen $(*)$ er en kompakt måte å uttrykke at *tangentialkomponenten* av $\boldsymbol{E}$ er kontinuerlig,

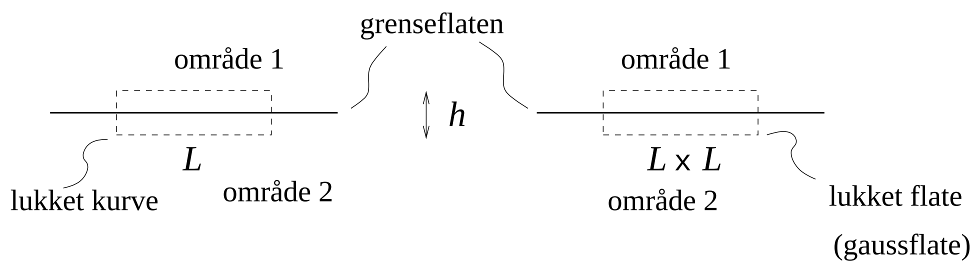
$$E_1^{\parallel} - E_2^{\parallel} = 0 \qquad (\text{evt } \ \Delta E^{\parallel} = 0)$$

mens *normalkomponenten* er diskontinuerlig,

$$E_1^{\perp} - E_2^{\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (\text{evt } \ \Delta E^{\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0})$$

når vi krysser grenseflaten. Bruk de to Maxwell-ligningene, $\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = 0$ og $\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{A} = q_{\text{in}}/\varepsilon_0$, for det elektrostatiske feltet til å utlede de oppgitte grenseflatebetingelsene for henholdsvis $E^{\parallel}$ og $E^{\perp}$. Fornuftig valg av lukket integrasjonskurve og -flate ("gaussboks") vil være som angitt i figuren nedenfor, henholdsvis en rektangulær kurve med sidekanter h og L og en "pilleeske" med sidekanter h, L og L. Begge "omslutter" en bit av grenseflaten. Du lar så L være "liten" men endelig (dvs så liten at feltstyrken kan antas å være konstant over hele lengden L, eventuelt over hele flaten $L \times L$), mens du lar høyden $h \to 0$.

For tangentialkomponenten: For normalkomponenten:



Sluttkommentar:
Du har nå brukt Gauss' lov for $\boldsymbol{E}$ til å utlede grenseflatebetingelsen for normalkomponenten av det elektriske feltet, dvs $E^\perp$. Da er det selvsagt ingen som kan hindre deg i å bruke Gauss' lov for den elektriske forskyvningsvektoren $\boldsymbol{D}$ til å utlede en tilsvarende grenseflatebetingelse for normalkomponenten $D^\perp$:

$$D_1^\perp - D_2^\perp = \sigma_f \qquad (\text{evt}\ \ \Delta D^\perp = \sigma_f)$$

Her er σ_f netto *fri* ladning pr flateenhet i grenseflaten mellom område 1 og 2.