**Institutt for fysikk, NTNU**
**TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme**
**Vår 2009, uke 10**

Onsdag 04.03.09 og fredag 06.03.09

## Ohms "lov"

[FGT 26.3; YF 25.2,25.3; TM 25.2; AF 24.3, LHL 21.2, DJG 7.1.1]

Må ha *drivende kraft* $\boldsymbol{F}$ for å få strøm gjennom lederen. Dersom

$$I \sim \boldsymbol{F} \sim \boldsymbol{E} \sim V$$

(dvs: dersom $I$ er proporsjonal med den drivende kraften, og dermed også proporsjonal med det elektriske feltet og dermed også proporsjonal med potensialforskjellen $V$, så...) har vi såkalt *lineær respons*:

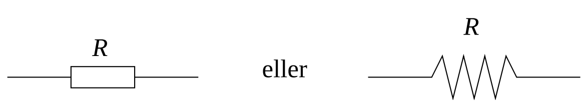
$$I = \frac{1}{R} V$$
$$\Rightarrow V = RI$$

som er Ohms lov.

Enhet for *motstand (resistans)*: $[R] = [V/I] = \text{V/A} = \Omega$ (ohm)

Ohmske materialer: Følger Ohms lov for store variasjoner i $I$
Ikke-ohmske materialer: Betydelige avvik fra lineær sammenheng mellom $I$ og $V$

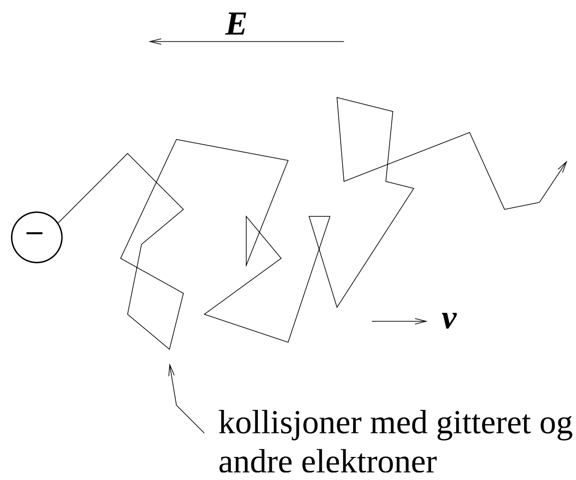
Kretssymbol for motstand:




## Elektrisk ledningsevne (konduktivitet)

[FGT 26.2,26.3; YF 25.2,25.3; TM 25.2; AF 24.4, LHL 21.2, DJG 7.1.1]

(Dette sammendraget er basert på forelesningen gitt i 2005 om temaet. Et sammendrag av P. K. Drudes modell finner du lenger ned i dette dokumentet. Se også YF 25.6 og LHL 21.4.)
Tilfeldig bevegelse (diffusjon) av ladningsbærere gjennom leder, *pluss* netto drift pga feltet $\boldsymbol{E}$




Midlere driftshastighet langs $-\boldsymbol{E}$: $\boldsymbol{v}$
Partikkelhastighet knyttet til temperaturen i lederen: $v_T \sim \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} \gg v$

Kommentar: En korrekt kvantemekanisk beskrivelse av elektronene i et metall vil faktisk resultere i en enda større partikkelhastighet. Det skyldes at elektronene er en type elementærpartikler som kalles *fermioner* og adlyder det såkalte *Pauliprinsippet*, som sier at man ikke kan ha mer enn ett fermion i hver tillatte "tilstand". Dette tvinger elektronene inn i tilstander med høyere energi enn de ville ha hatt hvis de var klassiske partikler. Mer om det i senere kurs i kvantemekanikk og faste stoffers fysikk!

For ohmsk materiale: $\boldsymbol{v} \sim \boldsymbol{E}$

Dette gir da lineær sammenheng mellom strømtetthet og elektrisk felt:

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$$

som definerer materialets *konduktivitet* $\sigma$. Dette er også Ohms lov.

Leder med lengde $l$, (konstant) tverrsnitt $A$ og konduktivitet $\sigma$ har resistans

$$R = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{A}$$

Bevis:

$$I = jA = \sigma EA = \sigma \frac{V}{l} A = \frac{1}{R} V \quad \Rightarrow \quad R = \frac{l}{\sigma A}$$

Her har vi antatt at $E$ er konstant i lederen (som er OK, se Griffiths, Example 7.3), og dermed lik spenningsfallet over lederen $V$ dividert med lengden $l$. Det siste likhetstegnet i ligningen over er rett og slett Ohms lov, dvs definisjonen av $R$.

Kan nå innføre *konduktans*:

$$G = \frac{1}{R}$$

og *resistivitet*:

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

$\sigma$ og $\rho$ er materialspesifikke størrelser

$R$ og $G$ avhenger i tillegg av lederens størrelse og utforming

Enheter:
$[G] = \Omega^{-1}$
$[\sigma] = [l/RA] = \Omega^{-1}\ \mathrm{m}^{-1}$
$[\rho] = \Omega\ \mathrm{m}$

**Temperaturavhengigheten til $\rho$**
[FGT 26.3; YF 25.2; TM 25.2; LHL 21.2+5]

Metaller: Hovedeffekten av økt temperatur $T$ er sterkere gittervibrasjoner, og dermed hyppigere kollisjoner mellom elektronene og gitteret. Dette gir redusert driftshastighet $v$ og redusert konduktivitet $\sigma$, dvs økt resistivitet $\rho$.
Empirisk (eksperimentelt) gjelder, over "et visst temperaturintervall", for metaller:

$$\rho(T) = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

Her er $T_0$ en valgt referansetemperatur, f.eks. 300 K, $\rho_0 = \rho(T_0)$ målt resistivitet ved $T_0$, og $\alpha$ målt temperaturkoeffisient, dvs helning på $\rho(T)/\rho_0$ plottet som funksjon av $T$. Metaller som Al og Fe har temperaturkoeffisienter $\alpha$ hhv 0.0039 og 0.0050. Det betyr at $\rho$ øker med hhv 3.9 og 5 % dersom temperaturen økes med 10 grader, fra $T_0$ til $T_0 + 10$ K (vel å merke så lenge den lineære sammenhengen gjelder).

Halvledere: Hovedeffekten av økt temperatur $T$ er at mange flere elektroner frigjøres fra sine "vertsatomer", blir mobile, og kan bidra til elektrisk strøm. Vi får dermed økt elektrisk ledningsevne, dvs redusert resistivitet $\rho$. Eksempler på halvledere er germanium (Ge), silisium (Si), galliumarsenid (GaAs). Ved romtemperatur er $\rho(\mathrm{Ge}) = 0.46$ og $\rho(\mathrm{Si}) = 2200$.

Superledere: I en del materialer *forsvinner* resistiviteten når temperaturen senkes under en viss *kritisk temperatur* $T_c$, dvs: $\rho = 0$ for $T < T_c$. Et eksempel er kvikksølv (Hg), som er et metall for temperaturer over $T_c = 4.12$ K. Under 4.12 K er $\rho = 0$ for Hg. Dette ble første gang påvist eksperimentelt av H. Kamerlingh Onnes i Leiden i 1911. Vi har en *faseovergang* ved $T = T_c$, fra en metallisk fase til en superledende fase. Mange andre grunnstoffer som er metaller ved "normale" temperaturer blir også superledende for lave nok temperaturer, med kritiske temperaturer noen få kelvin over det absolutte nullpunkt. Det finnes også materialer med mye høyere kritisk temperatur, opp mot 100 K og mer. Merk at en superleder og en "perfekt leder" er to forskjellige ting.

**Elektrisk effekt**
[FGT 26.7; YF 25.5; TM 25.3; AF 24.5, LHL 22.2, DJG 7.1]

Endring i potensiell energi, $\Delta U$, for ladning $\Delta Q$ som går gjennom et spenningsfall $V$:

$$\Delta U = \Delta Q \cdot V$$

Energibevarelse:

Uten kollisjoner: Får akselerasjon av ladningsbærerne og økt kinetisk energi.
Med kollisjoner (noe vi faktisk har!), dvs motstand $R$: $\Delta U$ "tapes" som *varme* i motstanden.

Effekttap = energitap pr tidsenhet:

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = V\frac{\Delta Q}{\Delta t} = V \cdot I$$

Hvis vi har ohmsk materiale ($V = RI$):

$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

Enhet for effekt:

$$[P] = [\frac{U}{t}] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \mathrm{W} \ \ (\text{watt})$$

**Kobling av flere motstander**
[FGT 26.4; YF 26.1; TM 25.4; AF 24.6, LHL 21.3]

Seriekobling av $N$ motstander $R_i$, $i = 1, .., N$:

$$R = \sum_{i=1}^{N} R_i$$

Parallellkobling av $N$ motstander $R_i$, $i = 1, .., N$:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}$$

I disse uttrykkene representerer $R$ den ekvivalente motstanden dersom vi erstatter alle de serie- eller parallellkoblede motstandene med en enkelt motstand. Merk: En ting er å huske disse to formlene. Enda viktigere er det å forstå *hvorfor* det må bli slik.

Et par kommentarer!

- Har ikke vi blitt enige om at inne i en elektrisk leder er det elektriske feltet lik null? Jo, men bare dersom vi har *elektrostatisk likevekt*! Når det går en elektrisk strøm gjennom lederen, har vi ikke lenger elektrostatisk likevekt! Og har vi ikke elektrostatisk likevekt, behøver ikke lenger det elektriske feltet å være lik null.

- I forelesningene slo jeg simpelthen fast, fullstendig uten bevis, at dersom vi har en (rett) leder med samme tverrsnitt langs hele lederen, og som fører en *stasjonær* (dvs tidsuavhengig) elektrisk strøm $I$, så er det elektriske feltet $\boldsymbol{E}$ *uniformt* overalt inne i lederen. Jeg har ikke tenkt å bevise dette resultatet her heller. (Men se eksempel 7.3 i

Griffiths, hvis du er interessert.) Imidlertid er det bryet verdt å se litt på *konsekvensene* av at det elektriske feltet er uniformt inne i en slik leder. Det betyr for eksempel at det ikke er noe netto ladning noen steder inne i lederen, på samme måte som vi har funnet tidligere inne i en leder i elektrostatisk likevekt. Uniformt elektrisk felt betyr at uansett hva slags volumelement, stort eller lite, inne i lederen vi ser på, må all elektrisk fluks inn i volumelementet også gå ut av volumelementet igjen. Men da er jo netto ladning inne i volumelementet lik null, ifølge Gauss' lov! Konklusjon: Potensialforskjellen over lederen, og det (uniforme) elektriske feltet inne i lederen, er "skapt" av ladninger som må befinne seg på lederens overflate. (Nøyaktig *hvordan* ladningsfordelingen på lederens overflate blir er som regel ikke så lett å beregne...!)

- Ulike materialer har svært ulike verdier for resistivitet. Eksempler: Sølv har $\rho = 1.59 \cdot 10^{-8}$ mens diamant har $\rho = 2.7$ (begge i enheten $\Omega$m og ved romtemperatur). Ulike typer glass har typisk resistiviteter i området $10^{10} - 10^{14}$. Vent litt, var vi ikke enige om at glass var en isolator, dvs uten mobile ladninger, og dermed null ledningsevne, eller uendelig resistivitet? Vel, som så mye annet her i verden er dette bare "nesten sant". Det *er* sant ved null temperatur. I praksis, ved "normale" temperaturer, har vi alltids et og annet elektron som er løsrevet fra sitt "opprinnelige" atom. I tillegg har vi alltid *urenheter* i større eller mindre grad, og slike "fremmedatomer" kan også bidra med frie ladninger og derved gi en viss elektrisk ledningsevne. Men: Legg merke til de enorme forskjellene i tallverdier: Forholdet mellom resistiviteten til glass og sølv kan bli opptil $10^{22}$. En motstand i en elektrisk krets er typisk laget av et materiale med betydelig større resistivitet enn metallet i tilførselsledningene. Vi kan derfor med god tilnærmelse betrakte de metalliske tilførselsledningene som ekvipotensialer, dvs med null spenningsfall over dem, og dermed også null elektrisk felt inne i dem. Ettersom vi har sammenhengen $\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$, ser vi at null felt samtidig med en strømtetthet som *ikke* er null må bety $\sigma \to \infty$. Da snakker vi om at vi har en *perfekt* leder. Og i dette kurset betyr "isolator" som regel "perfekt isolator", dvs et materiale med uendelig resistivitet, eller $\sigma = 0$. Da ser vi at $j = 0$ *alltid*, selvom $E \neq 0$.

### Elektrisk ledningsevne: Klassisk forenklet mikroskopisk modell a la P. K. Drude anno 1900 (YF 25.6, LHL 21.4)

I et metall vil frie elektroner, med ladning $-e$ og masse $m_e$, kollidere med ionegitteret på sin vei gjennom krystallen. (Ioner, med positiv ladning, fordi hvert atom har gitt fra seg ett (eller flere) elektron(er) til en "gass" av frie elektroner.)
Midlere avstand mellom kollisjonssentra blir av samme størrelsesorden som gitteravstanden:

$$a \sim 10^{-9} \text{ m}$$

Midlere partikkelhastighet $v_T$ ved temperatur $T$ er gitt ved at

$$\frac{1}{2} m_e v_T^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

der $k_B$ er Boltzmanns konstant. Dermed:

$$v_T = \sqrt{\frac{3k_BT}{m_e}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{9 \cdot 10^{-31}}} \simeq 10^5 \text{ m/s}$$

Dermed blir midlere tid mellom to kollisjoner:

$$\tau \simeq \frac{a}{v_T} \simeq 10^{-14} \text{ s}$$

La oss anta at en kollisjon mellom et elektron og et ion i gitteret fører til at elektronet får en fullstendig tilfeldig retning på hastigheten umiddelbart etter kollisjonen, dvs

$$\langle v_x \rangle \simeq 0$$

umiddelbart etter en kollisjon. Vi velger her (negativ) $x$-akse som retning for det elektriske feltet som sørger for en foretrukken retning for transport av elektroner gjennom metallet:

$$\boldsymbol{E} = E_x \hat{x}$$

dvs med $E_x < 0$. Newtons 2. lov bestemmer nå elektronets bevegelse i tiden mellom to kollisjoner:

$$F_x = m_e \frac{dv_x}{dt} = -eE_x$$

som gir en midlere hastighet i $x$-retningen rett før ny kollisjon

$$\langle v_x \rangle = -\frac{e}{m_e} \tau E_x$$

Og dette må da også bli omtrent riktig uttrykk for midlere driftshastighet for de frie elektronene i metallet:

$$\boldsymbol{v}_d = -\frac{e\tau}{m_e} \boldsymbol{E}$$

Fra før har vi sammenhengen

$$\boldsymbol{j} = nq\boldsymbol{v}_d = -ne\boldsymbol{v}_d$$

mellom strømtettheten $\boldsymbol{j}$ og driftshastigheten $\boldsymbol{v}_d$. $n$ er antall frie elektroner pr volumenhet. Men da kan vi skrive ned sammenhengen mellom $\boldsymbol{j}$ og $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$$

der

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m_e}$$

er *konduktiviteten* til metallet. Som vi har sett tidligere i dette sammendraget, er dette nettopp Ohms lov!

Drudes modell er overforenklet på flere måter, uten at vi skal gå nærmere inn på det i denne omgang. Men la oss til slutt sette inn noen mer eller mindre rimelige tallverdier og se hva vi får for f.eks. konduktiviteten til kobber:

$$
\begin{aligned}
n &\sim 10^{29} \\
\tau &\sim 10^{-14} \\
e &\sim 10^{-19} \\
m_e &\sim 10^{-30}
\end{aligned}
$$

Her er alle størrelser angitt med SI-enheter, og disse tallene gir

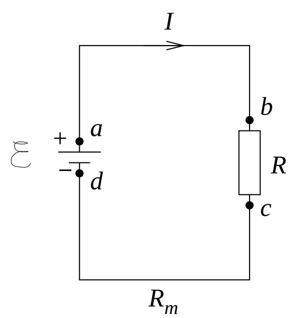
$$\sigma(\mathrm{Cu}) \sim 10^7$$

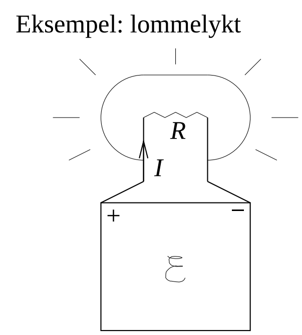
Eksperimentelt har vi, ved romtemperatur,

$$\sigma(\mathrm{Cu}) = 5.8 \cdot 10^7$$

som egentlig er overraskende nært.

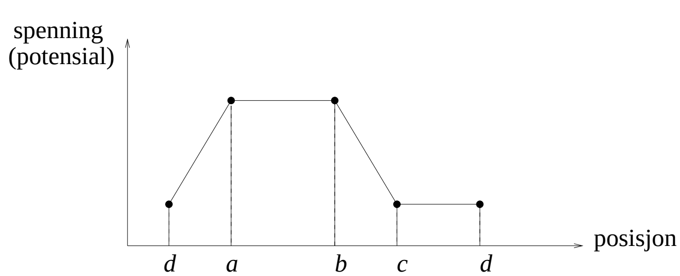
**Likestrømkretser ("DC")**
[FGT 27; YF 25.4, 26; TM 25; AF 24.7; LHL 22]



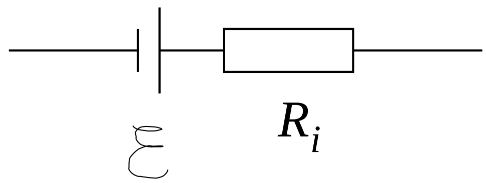

Likespenningskilde (f.eks. kjemisk batteri, solcelle, brenselcelle etc.):
"Leverer" *elektromotorisk spenning* (ems) $\mathcal{E}$, dvs: sørger for å holde konstant potensialforskjell $\mathcal{E}$ mellom de to "polene" + og -.

Spenningsforhold i kretsen over ($\Delta V$ er endring i elektrisk potensial):



$a \to b: \Delta V \simeq 0$ (metall-ledning, god leder, $R_m \simeq 0$, $\boldsymbol{E} \simeq 0$)
$b \to c: \Delta V = -RI$ (motstand, dårlig leder, $R \gg R_m$, potensiell energi går tapt som varme pga kollisjoner, $\boldsymbol{E} \neq 0$)
$c \to d: \Delta V \simeq 0$ (som $a \to b$)
$d \to a: \Delta V = \mathcal{E} = RI$ (*mottar* ladningsbærere med lav potensiell energi, *leverer* ladningsbærere med høy potensiell energi.)

En *reell* kilde har alltid en viss indre motstand $R_i$:




Når en reell spenningskilde kobles til en elektrisk krets, kommer den indre motstanden $R_i$ som et tillegg til kretsens resistans $R$. Vi får da f.eks. effekttap både i kilden ($P_i = R_i I^2$) og i resten av kretsen ($P_R = RI^2$). Videre ser vi at spenningen mellom polene på spenningskilden nå blir $\mathcal{E} - R_i I$, dvs mindre enn $\mathcal{E}$ dersom $I > 0$.

En *ideell* kilde har $R_i = 0$. I oppgaver hvor det ikke sies noe om indre motstand i en spenningskilde, antar vi at $R_i = 0$.

**Kirchhoffs regler**
[FGT 27.2, 27.3; YF 26.2; TM 25.5; AF 24.8; LHL 22.3]

Beregninger på elektriske kretser gjøres ved hjelp av Kirchhoffs regler.

Regel 1 (Knutepunktsregelen, "K1"): På grunn av *ladningsbevarelse* er

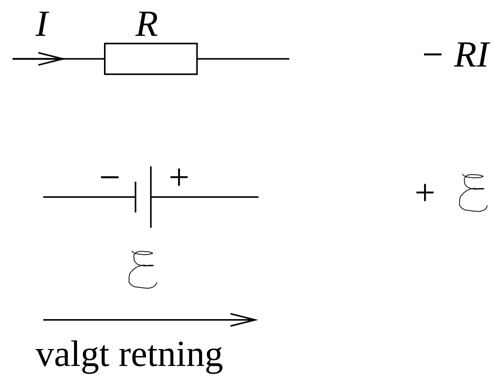
$$\sum_j I_j = 0$$

i alle knutepunkt i en krets.
I motsatt fall ville vi få opphopning av ladning i knutepunktet.
Fortegnskonvensjon: *Positiv I* når den går *ut av* knutepunktet.

Regel 2 (Sløyferegelen, "K2"): På grunn av *energibevarelse* er

$$\sum(\text{potensialendringer}) = 0$$

for alle lukkede sløyfer i en krets.
I motsatt fall ville vi ikke ha en entydig potensiell energi for ladningsbærere på et gitt sted i kretsen.
Fortegnskonvensjon: *Positivt* bidrag betyr *potensialøkning*.




Kirchhoffs regler gir et tilstrekkelig antall uavhengige ligninger til å bestemme de ukjente størrelsene, f.eks. strømstyrkene $I_j$ i kretsens ulike ”grener”.