Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2009, uke 13

Onsdag 25.03.09 og fredag 27.03.09

Amperes lov
[FGT 30.1, 30.3; YF 28.6, 28.7; AF 26.2; LHL 23.6; G 5.3]

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I_{\text{in}}$$

for lukket integrasjonskurve som omslutter stasjonær strøm I_{in}. Gjelder for *vilkårlig* lukket kurve og *vilkårlig* strøm I.
Fortegn på strømmen i henhold til høyrehåndsregelen.

Amperes lov *nyttig* når vi har en passende (utnyttbar) symmetri i problemet, slik at integralet på venstre side blir enkelt å løse. (Sylindersymmetri: Uendelig lang rett strømførende leder (forelest). Plansymmetri: Uendelig stort strømførende plan eller skive (øving 12). Dessuten: Uendelig lang spole, se nedenfor, og "smultringformet" spole, dvs såkalt toroide, se f.eks. eksamen desember 2002 oppgave 5 eller øving 12.)

Magnetfelt fra uendelig lang spole med tette viklinger:
Inne i spolen:

$$B = \mu_0 n I$$

med I = strømmen i spoletråden og n = antall viklinger av spoletråden pr lengdeenhet. Dvs: Uniformt magnetfelt.
Utenfor spolen er $B = 0$.

Kommentar til eksemplet med uendelig lang spole: Hvorfor kan jeg være så sikker på at $B = 0$ når jeg fjerner meg uendelig langt vekk fra spolen. (Dette var en nødvendig antagelse for å bevise at $B = 0$ overalt utenfor spolen.) Årsaken til bekymringen er blant annet at det elektriske feltet fra et uendelig stort uniformt ladet plan *ikke* går mot null selv om vi går uendelig langt unna. Så derfor: Med *uendelig* lang spole kan det vel tenkes at også B ikke går mot null uendelig langt borte?
Svaret er ja, det kan tenkes, men nei, det er ikke tilfelle! Hvorfor? Her kan det argumenteres på flere måter. For det første kan vi ta utgangspunkt i Biot-Savarts lov og rett og slett regne ut magnetfeltet på utsiden av en uendelig lang spole. Dette er litt kronglete, men det lar seg gjøre, og du vil finne at $B = 0$ uansett avstand til spolen.
Et litt mer "løsaktig" argument er som følger: Hver vikling på spolen er en magnetisk *dipol*, slik at bidraget (i absoluttverdi) fra hver vikling faller av som $1/r^3$ for store avstander r mellom viklingen og "observasjonspunktet". Sammenligner vi med det uendelig store ladete planet, har vi i det tilfellet bidrag til det elektriske feltet fra elektriske *monopoler* (dvs ladningsbiter

dq) som "bare" faller av som $1/r^2$, der r er avstanden fra ladningselementet dq til observasjonspunktet. I tillegg kommer det med retningen på de ulike bidragene inn: Det elektriske feltet fra et uendelig stort ladet plan er sammensatt av små bidrag som alle har normalkomponent enten bort fra eller inn mot planet (avhengig av om planet er positivt eller negativt ladet). Men slik er det ikke med magnetfeltbidragene fra de ulike viklingene på spolen: Viklingen "rett under" observasjonspunktet bidrar med magnetfelt rettet fullstendig i spolens lengderetning. Viklinger i nærheten av rett under observasjonspunktet bidrar med samme fortegn på "langsmedkomponenten", mens viklinger langt unna rett under observasjonspunktet bidrar med motsatt fortegn. Alt i alt: All grunn til å kunne anta at $B = 0$ langt borte fra spolen.
Og sammenhold gjerne med oppgave 1 i øving 12, det uendelig store strømførende planet: Her går *ikke* magnetfeltet mot null selv om vi går uendelig langt unna! Men her går da også alle strømbidrag i samme retning, slik at bidragene til det totale magnetfeltet legger seg sammen til noe som er *endelig*, og ikke null.

Magnetisk fluks og Gauss' lov for $\boldsymbol{B}$
[FGT 29.2; YF 27.3; TM 28.1, 27.3; AF 26.3; LHL 23.7; DJG 5.3]

Magnetisk fluks ϕ_B gjennom flate S:

$$\phi_B = \int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

Magnetfeltstyrken B er proporsjonal med antall magnetiske feltlinjer pr flateenhet. Dermed blir den magnetiske fluksen ϕ_B proporsjonal med antall feltlinjer gjennom flaten. (Sammenlign med elektrisk fluks!)

Siden magnetiske feltlinjer alltid er *lukkede*, får vi Gauss' lov for magnetfeltet:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

for lukket flate. Uttrykker at det ikke finnes magnetiske monopoler.

Oppsummering, elektrostatikk og magnetostatikk: Maxwells ligninger

Gauss' lov for elektrostatisk felt:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = q_{\text{in}}/\varepsilon_0$$

Elektrostatisk felt er konservativt:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

Gauss' lov for magnetfelt:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

Amperes lov:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I_{\text{in}}$$

Med gitte "kilder", dvs statiske ladninger og stasjonære strømmer, gir dette oppskriften på beregning av $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$.

Lorentzkraften,

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

bestemmer deretter hvordan en ladning q med hastighet $\boldsymbol{v}$ vil bevege seg i feltene $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$

Magnetisme
[YF 28.8; LHL 26]

Elementærpartiklers magnetiske dipolmoment
[FGT 31.2; YF 28.8; TM 27.5; AF 22.7, 23.7; LHL 26.2]

Klassisk bilde av *atom*: Elektroner i (sirkulær) bane rundt atomkjernen.

Elektrisk strøm I i sirkelbanen for ladning q med hastighet v i sirkelbane med radius r:

$$I = \frac{q}{T} = \frac{q}{2\pi r/v} = \frac{qv}{2\pi r}$$

der T = omløpstiden.
Omsluttet areal er:

$$A = \pi r^2$$

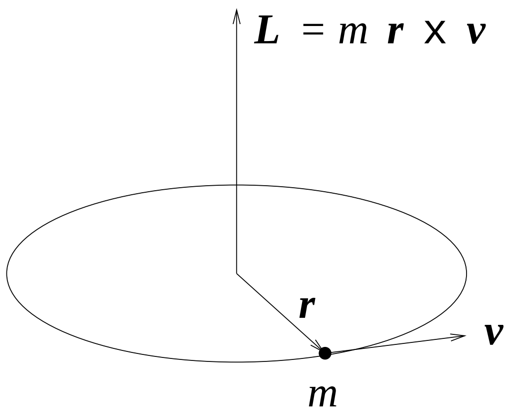
Magnetisk dipolmoment blir:

$$|\boldsymbol{m}| = IA = \frac{qv}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} qvr$$

Kan uttrykkes ved partikkelens *banedreieimpuls* $\boldsymbol{L}$:

$$\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$$

der m = partikkelens masse.



For sirkelbane er $\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{v}$ slik at

$$L = |\boldsymbol{L}| = mrv$$

Dermed:

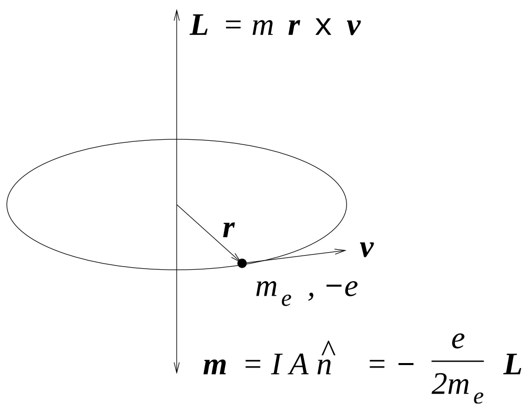
$$|\boldsymbol{m}| = \frac{1}{2}qvr = \frac{q}{2m}L$$

På vektorform:

$$\boldsymbol{m} = \frac{q}{2m}\boldsymbol{L}$$

For elektron (med $q = -e$ og $m = m_e$):

$$\boldsymbol{m} = -\frac{e}{2m_e}\boldsymbol{L}$$



Elektroner (og protoner og nøytroner osv) har også "indre dreieimpuls", såkalt *spinn* $\boldsymbol{S}$. Klassisk bilde av spinn for elektron: Roterende ladet kule. Klassisk forventes bidrag

$$-\frac{e}{2m_e}\boldsymbol{S}$$

fra spinnbevegelsen til elektronets totale magnetiske dipolmoment.

Kvalitativt er disse klassiske bildene OK: Elementærpartikler som elektroner, protoner og nøytroner *har* magnetisk dipolmoment $\boldsymbol{m}$ som kan uttrykkes ved partikkelens totale dreieimpuls $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L}+\boldsymbol{S}$ = vektorsummen av banedreieimpulsen $\boldsymbol{L}$ og spinnet $\boldsymbol{S}$.

Kvantitativt bryter den klassiske modellen sammen: Det er helt nødvendig med en *kvantemekanisk* beskrivelse for å kunne regne ut de ulike partiklenes magnetiske dipolmoment (og dermed et atoms magnetiske dipolmoment $\boldsymbol{m}_A$).

Vi kan ikke gå inn på den kvantemekaniske beskrivelsen her. Vi nevner bare at relativistisk kvantemekanikk (Dirac-teori) gir

$$|\boldsymbol{m}_e| = \frac{e}{m_e} S_e$$

med

$$S_e = \frac{1}{2}\hbar$$

der

$$\hbar \simeq 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

er (den "reduserte") Plancks konstant.
En enda mer sofistikert teori (kvanteelektrodynamikk, QED) gir

$$|\boldsymbol{m}_e| = 1.01159655\, \mu_B$$

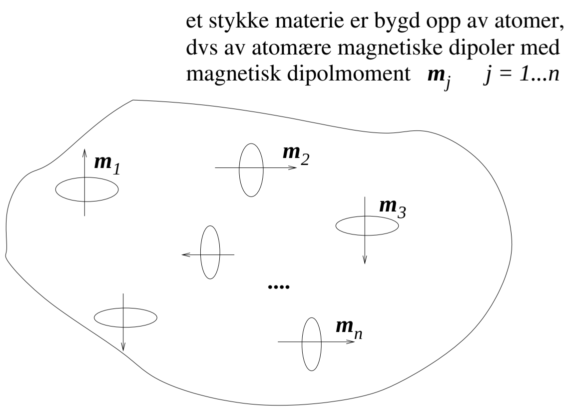
mens nøyaktige eksperimenter gir

$$|\boldsymbol{m}_e| = 1.01159652181\, \mu_B$$

(Physical Review Letters **97**, 030801 (2006))
Med andre ord, mye som tyder på at QED er en bra teori. Her har vi innført størrelsen *Bohr magneton*,

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \simeq 9.27 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2$$

som er en hensiktsmessig enhet for elementærpartiklers magnetiske moment.
Vi har nå muligens klart å overbevise oss om at atomer faktisk er som små elektriske strømsløyfer, og derfor små magnetiske dipoler. Med andre ord: Materien som vi omgir oss med består av mange små atomære magnetiske dipoler:



Mer om dette, og mer om magnetisme i neste uke.