Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektromagnetisme
Vår 2009, uke17

Onsdag 22.04.09 og fredag 24.04.09

Energi i magnetfelt
[FGT 32.2, 32.3; YF 30.3; TM 28.7; AF 26.8, 27.11; LHL 25.3; DJG 7.2.4]

La oss regne ut hvor mye energi som må tilføres en spole med induktans L når vi øker strømmen gjennom spoletråden fra $i = 0$ til en "sluttverdi" $i = I$.
Tilført energi ved å øke strømmen fra i til $i + di$:

$$dU_B = P\,dt = iv\,dt = iL\frac{di}{dt}dt = Li\,di$$

Her er $P = iv$ tilført effekt, og $v = Ldi/dt$ spenningen over spolen idet vi endrer strømmen fra i til $i + di$.
Dermed blir total energi tilført for å øke strømmen fra 0 til I lik

$$U_B = \int dU_B = L\int_0^I i\,di = \frac{1}{2}LI^2$$

Denne energien kan vi nå assosiere med magnetfeltet B inne i spolen. Anta at spolen er tilnærmet uendelig lang, med N viklinger på hele lengden l. Tverrsnittet av spolen har areal A. Da er magnetfeltet inne i spolen

$$B = \mu_0 nI = \mu_0\frac{N}{l}I$$

(På utsiden av spolen er magnetfeltet null.) Total magnetisk fluks gjennom de N viklingene på spolen blir

$$\phi_m = NAB = NA\mu_0\frac{N}{l}I$$

som også kan skrives på formen

$$\phi_m = LI$$

der L er spolens (selv-)induktans. Med dette kan vi omforme uttrykket for energien U_B:

$$U_B = \frac{1}{2}\frac{NAB}{I}I^2 = \frac{1}{2}NAB\cdot\frac{Bl}{\mu_0 N} = \frac{1}{2\mu_0}B^2\cdot Al$$

Her er Al lik volumet inne i spolen, så vi ser at vi har en *energitetthet* (dvs energi pr volumenhet) assosiert med magnetfeltet B:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

Fra før har vi funnet at vi har en energitetthet u_E assosiert med et elektrisk felt E:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Dermed blir *total energitetthet i et elektromagnetisk felt*:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

Kommentar: Dette uttrykket er "alltid riktig", i den forstand at u representerer energien "lagret" i feltene E og B. I litteraturen "risikerer" du å støte på formelen

$$u = \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu}B^2$$

for total energitetthet dersom vi har polariserbare og/eller magnetiserbare medier tilstede. (I den siste overgangen her brukte vi at $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$, med $\varepsilon =$ mediets permittivitet og $\mu =$ mediets permeabilitet.)
Disse to uttrykkene for u er ikke identiske, og kan derfor ikke representere den samme energitettheten. Det siste uttrykket for u inkluderer da også et bidrag som ikke er direkte "lagret" i feltene, nemlig den "elastiske" energien knyttet til polarisering og magnetisering, dvs innrettingen av elektriske og magnetiske dipoler.
I den grad noe av dette blir aktuelt til eksamen, skal vi kun bry oss om *feltenergien* gitt ved

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

Koblede systemer, selvinduktans og gjensidig induktans
(ble ikke forelest våren 2009, derfor er det ikke direkte pensum, men kun orienteringsstoff)
Anta at vi har to kretser, nr 1 og nr 2, med selvinduktans hhv L_1 og L_2 og gjensidig induktans M. Anta f.eks. at vi i krets nr 1 har en tidsavhengig spenningskilde $\mathcal{E}_1(t)$. Den samlede resistansen i de to kretsene er hhv R_1 og R_2.
Vi skal bestemme de resulterende strømstyrkene I_1 og I_2 i de to kretsene. Kirchhoffs spenningsregel gir da følgende ligninger:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 - L_1\dot{I}_1 - R_1 I_1 - M\dot{I}_2 &= 0 \\ -L_2\dot{I}_2 - R_2 I_2 - M\dot{I}_1 &= 0 \end{aligned}$$

Dette er to koblede differensialligninger for de to ukjente, $I_1(t)$ og $I_2(t)$. Hvis $\mathcal{E}_1$ er en harmonisk vekselspenningskilde,

$$\mathcal{E}_1(t) = \mathcal{E}_0 \cos\omega t,$$

med amplitude $\mathcal{E}_0$ og vinkelfrekvens ω, vil også strømmene I_1 og I_2 variere harmonisk med tiden, med samme vinkelfrekvens ω. Dermed kan vi generelt skrive

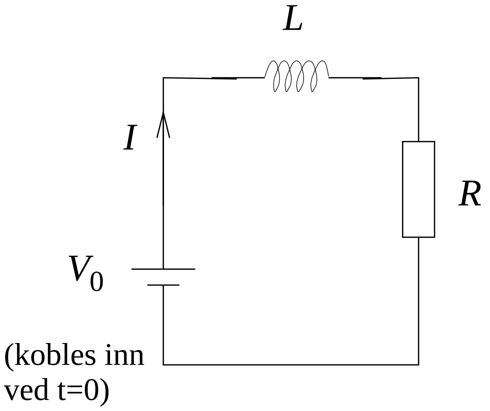
$$\begin{aligned} I_1(t) &= A_1\cos\omega t + B_1\sin\omega t \\ I_2(t) &= A_2\cos\omega t + B_2\sin\omega t \end{aligned}$$

og innsetting av disse uttrykkene i de to differensialligningene gir da i alt fire ligninger, for fastleggelse av "koeffisientene" A_1, A_2, B_1, B_2. (Fire ligninger fordi vi kan sammenligne $\cos \omega t$-ledd og $\sin \omega t$-ledd hver for seg, slik som i AC-eksemplet nedenfor.)

(herfra er stoffet pensum igjen)

RL-krets med likespenningskilde V_0
[FGT 32.4; YF 30.4; TM 28.8; AF Ex 27.5; LHL 25.2; DJG Ex 7.12]

Ser på seriekobling av *induktans* L (f.eks. en spole) og *resistans* R. Et batteri med likespenning V_0 kobles til kretsen ved tidspunktet $t = 0$.



Total ems i kretsen er da

$$V_0 - L\frac{dI}{dt}$$

der det siste leddet er indusert "motspenning" over induktansen når vi prøver å *endre* strømstyrken gjennom den.
Ifølge Kirchhoffs spenningsregel (evt "sløyferegel") må denne totale emsen i sløyfa tilsvare spenningsfallet over motstanden R, med andre ord

$$V_0 - L\frac{dI}{dt} = RI$$

eller

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V_0$$

Dette er nøyaktig samme type 1. ordens differensialligning for strømmen I som det vi hadde for kondensatorladningen Q da vi studerte opplading av kondensator i en RC-krets. Løsningen blir

$$I(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$

der vi har brukt initialbetingelsen $I(0) = 0$. (Før innkobling av batteriet er åpenbart $I = 0$. I tidspunktet $t = 0$ kan *ikke* strømmen i kretsen "hoppe" opp til en endelig verdi forskjellig fra null. Det måtte i såfall innebære at $dI/dt \to \infty$ i $t = 0$, hvilket igjen ville innebære en uendelig stor motspenning over induktansen. Det er rett og slett ikke fysisk mulig! Altså må I være kontinuerlig i $t = 0$, og vi kan sette $I(0) = 0$.)

Tidskonstant for endring av strømmen:

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Verdien av τ gir en *størrelsesorden* for hvor lang tid det tar å øke strømmen i en slik RL-krets fra 0 til maksimal verdi V_0/R:

$$I(t \to \infty) = \frac{V_0}{R}$$

RL-krets med vekselspenningskilde $V_0 \cos \omega t$
[FGT 33.2; YF 31.2; TM 29.2, 29.3; AF Note 27.2; LHL 27.3]

Med en vekselspenningskilde $V_0 \cos \omega t$ koblet til en induktans L har vi med bruk av Kirchhoffs spenningsregel:

$$\begin{aligned}
V_0 \cos \omega t + V_L &= 0 \\
V_0 \cos \omega t &= L \frac{dI}{dt} \\
I(t) &= \frac{V_0}{\omega L} \sin \omega t = \frac{V_0}{\omega L} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})
\end{aligned}$$

Vi kan skrive strømmen $I(t)$ på formen

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \alpha)$$

(jfr tidligere i kurset, og tilsvarende for kapasitans C og RC-kretser), og ser at strømamplituden er

$$I_0 = \frac{V_0}{\omega L}$$

mens fasevinkelen er

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

Dvs, strøm I og påtrykt spenning $V = V_0 \cos \omega t$ er faseforskjøvet med en kvart periode i forhold til hverandre. I forbindelse med RC-kretser og vekselspenningskilde innførte vi størrelsen *impedans* Z, definert ved

$$Z = \frac{V_0}{I_0}$$

Med andre ord, en slags generalisert motstand, jfr Ohms lov $R = V/I$. Vi ser da at impedansen til en induktans L blir

$$Z_L = \omega L$$

med fasevinkel

$$\alpha_L = \pi/2$$

Et eksempel til: Vekselspenningskilde $V_0 \cos \omega t$ koblet til en parallellkobling av en motstand R og en induktans L.
Da må den totale strømmen I som "leveres" av spenningskilden fordele seg på en strøm I_R gjennom motstanden og en strøm I_L gjennom induktansen:

$$I = I_R + I_L$$

(Dvs: Kirchhoffs strømregel.) Videre må vi gjenfinne den påtrykte spenningen som et tilsvarende spenningsfall, både over motstanden og over induktansen. Med andre ord:

$$\begin{aligned} V_0 \cos \omega t &= R I_R \\ V_0 \cos \omega t &= L \frac{dI_L}{dt} \end{aligned}$$

(Dvs: Kirchhoffs spenningsregel.) Disse ligningene løses greit, og vi finner

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{V_0}{R} \cos \omega t \\ I_L &= \frac{V_0}{\omega L} \sin \omega t \end{aligned}$$

Total strøm levert av spenningskilden blir dermed

$$I(t) = I_R(t) + I_L(t) = \frac{V_0}{R} \cos \omega t + \frac{V_0}{\omega L} \sin \omega t$$

Vi kan skrive denne summen av to ledd på formen

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \alpha)$$

ved å bruke den trigonometriske relasjonen

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Dermed:

$$\cos(\omega t - \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha + \sin \omega t \sin \alpha$$

Sammenligning med uttrykket for $I(t) = I_R + I_L$ gir oss følgende to ligninger for de to ukjente størrelsene I_0 og α:

$$\begin{aligned} \frac{V_0}{R} &= I_0 \cos \alpha \\ \frac{V_0}{\omega L} &= I_0 \sin \alpha \end{aligned}$$

Dette ligningssettet har løsning

$$\tan \alpha = \frac{R}{\omega L} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan \frac{R}{\omega L}$$

og

$$I_0 = V_0 \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2} \right)^{1/2}$$

Fra definisjonen av impedans, $Z = V_0/I_0$, ser vi at impedansen til en parallellkobling er

$$Z = \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}\right)^{-1/2}$$

Dersom vinkelfrekvensen til spenningskilden er liten, dvs $\omega \ll R/L$, vil leddet $1/\omega^2 L^2$ dominere i forhold til $1/R^2$, slik at

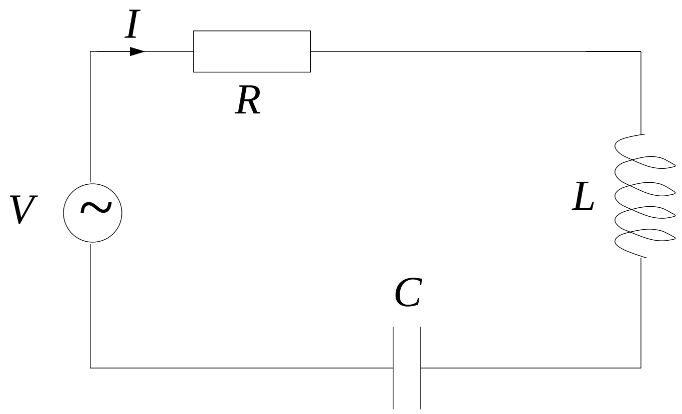
$$Z \simeq \omega L$$

Dersom vinkelfrekvensen til spenningskilden er stor, dvs $\omega \gg R/L$, vil leddet $1/R^2$ dominere i forhold til $1/\omega^2 L^2$, slik at

$$Z \simeq R$$

Resonanskrets: RCL-krets med vekselspenningskilde $V_0 \cos \omega t$
[YF 31.3; LHL 27.5]

Figuren nedenfor viser en såkalt resonanskrets.



Kirchhoffs spenningsregel gir

$$V_0 \cos \omega t - RI - L\dot{I} - Q/C = 0$$

som med $I = \dot{Q}$ gir

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + Q/C = V_0 \cos \omega t$$

Dette er en 2. ordens inhomogen differensialligning for kondensatorladningen Q. Den generelle løsningen er en sum av en homogen løsning (dvs: løsning av ligningen med null på høyre side) og en partikulærløsning. Vi er her ikke interessert i den homogene løsningen, som kun bidrar til et "innsvingningsforløp" rett etter at vi har koblet til spenningskilden. Det som interesserer oss her er partikulærløsningen, dvs den som beskriver "tvungne" svingninger av Q og I, dvs svingninger med samme (vinkel-)frekvens som påtrykt spenning. Da kan vi skrive strømmen på formen

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \alpha),$$

dvs

$$I = \dot{Q} = I_0 \cos\alpha \cos\omega t + I_0 \sin\alpha \sin\omega t.$$

Det gir videre

$$\ddot{Q} = -\omega I_0 \cos\alpha \sin\omega t + \omega I_0 \sin\alpha \cos\omega t$$

og

$$Q = \frac{I_0}{\omega} \cos\alpha \sin\omega t - \frac{I_0}{\omega} \sin\alpha \cos\omega t.$$

Innsetting av disse uttrykkene i diffligningen for Q gir oss 2 ligninger for de 2 ubestemte størrelsene I_0 og α, i og med at leddproporsjonale med $\sin\omega t$ og $\cos\omega t$ må stemme overens hver for seg. Etter litt algebra kommer vi fram til løsningen

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right)$$

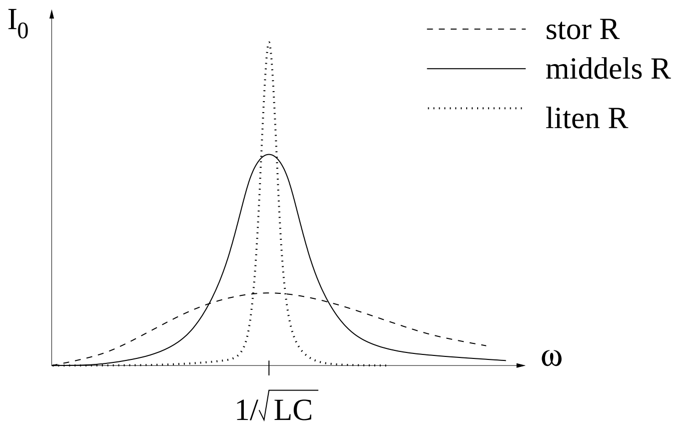
for fasevinkelen og

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

for strømamplituden. Resonanskretsens impedans er følgelig

$$Z = \frac{V_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

Figuren nedenfor viser hvordan I_0 varierer med ω for hhv stor, middels og liten verdi for resistansen R. Når $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, får vi maksimal amplitude på strømmen. Vi har da *resonans*. Frekvensen til den påtrykte spenningen "matcher" da den elektriske kretsens "naturlige frekvens" ω_0.



For riktig lave frekvenser ($\omega \to 0$) representerer kondensatoren et brudd i en tilnærmet likestrømkrets. Da er det ikke urimelig at $I_0 \to 0$. For riktig høye frekvenser ($\omega \to \infty$, eventuelt $\omega \gg \omega_0$) blir indusert motspenning i induktansen L stor selv uten strøm av betydning. Da er det heller ikke urimelig at $I_0 \to 0$ i denne grensen.

Oppgave: Vis at midlere effekt som spenningskilden tilfører kretsen,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T V(t)I(t)dt$$

blir

$$\langle P \rangle = \frac{V_0 I_0 \cos\alpha}{2}$$

Hva blir $\langle P \rangle$ på resonans, dvs når $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$?

AC-kretser med kompleks regning. Kompleks impedans.
[YF 31.3; LHL 27.6]

Utregning av strøm og impedans i AC-kretser kan forenkles *betraktelig* ved å utnytte at

$$\cos\omega t = \mathrm{Re}\left\{e^{i\omega t}\right\},$$

eventuelt

$$\sin\omega t = \mathrm{Im}\left\{e^{i\omega t}\right\}.$$

Dermed kan vi (midlertidig!) skrive påtrykt spenning som

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t}$$

og strømmen på formen

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t}.$$

Vi må bare huske på å ta realdelen av utregnet $I(t)$ til slutt for å få den *fysiske* strømmen i kretsen.
Her må vi dessuten tillate I_0 å bli en kompleks størrelse,

$$I_0 = |I_0| e^{-i\alpha},$$

inntil videre. Da har vi nemlig at

$$\mathrm{Re}\left\{I_0 e^{i\omega t}\right\} = |I_0|\cos(\omega t - \alpha),$$

og det er jo nettopp på den formen vi ønsker å skrive strømmen i en slik AC-krets!
Kretsens impedans Z blir dermed også en kompleks størrelse:

$$Z = \frac{V_0}{I_0} = \frac{V_0}{|I_0|}e^{i\alpha} = |Z|e^{i\alpha},$$

dvs med absoluttverdi

$$|Z| = V_0/|I_0|,$$

og med fasevinkel α. Med andre ord: Den komplekse impedansen har innebygd informasjon om både strømmens amplitude $|I_0|$ *og* faseforskyvningen α mellom påtrykt spenning og resulterende strøm! Smart, ikke sant?
Men tilbake til det regnetekniske: Poenget er at den deriverte av eksponentialfunksjonen er eksponentialfunksjonen selv. Dermed vil alle ledd i ligningen(e) som følger når vi anvender Kirchhoffs regler, ha *samme* tidsavhengige faktor $\exp(i\omega t)$, som dermed kan forkortes uten videre. Vi slipper å styre og herje med å skrive om trigonometriske funksjoner for å bestemme $|I_0|$ og α.
For RCL-kretsen hadde vi diffligningen

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + Q/C = V_0 \cos \omega t$$

for kondensatorladningen Q. Vi erstatter høyre side med $V_0 \exp(i\omega t)$ og skriver ladningen på formen

$$Q(t) = Q_0 e^{i\omega t},$$

der vi som for I_0 tillater kompleks amplitude Q_0. Innsetting av Q gir da

$$(-\omega^2 L + i\omega R + 1/C)Q_0 e^{i\omega t} = V_0 e^{i\omega t},$$

dvs

$$Q_0 = \frac{V_0}{i\omega R - \omega^2 L + 1/C}.$$

Vi har da

$$I = \dot{Q} = i\omega Q = i\omega Q_0 e^{i\omega t} = \frac{V_0}{R + i\omega L + 1/i\omega C}\, e^{i\omega t}$$

med kompleks amplitude

$$I_0 = \frac{V_0}{R + i\omega L + 1/i\omega C}$$

Her er nevneren nettopp den komplekse impedansen,

$$Z = R + i\omega L + 1/i\omega C$$

som ganske enkelt er en sum av enkeltimpedansene $Z_R = R$ (for en resistans R), $Z_L = i\omega L$ (for en induktans L) og $Z_C = 1/i\omega C$ (for en kapasitans C). Dvs: Samme regel for seriekobling av komplekse impedanser i AC-kretser som for seriekoblede resistanser i DC-kretser!
Da er det nok ingen overraskelse å få høre at vi også har samme regel for parallellkobling av komplekse impedanser i AC-kretser som for parallellkobling av vanlige resistanser i DC-kretser.
Eksempel: Total impedans i en krets med en R, L og C koblet i parallell er

$$Z = (1/R + 1/i\omega L + i\omega C)^{-1}.$$

Oppsummert:
Impedans for motstand R: $Z_R = R$
Impedans for induktans L: $Z_L = i\omega L$
Impedans for kapasitans C: $Z_C = 1/i\omega C$

Disse uttrykkene kan du selv overbevise deg om ved å se på tre kretser hver for seg, med en spenningskilde $V_0 \exp(i\omega t)$ koblet til hhv en motstand, en induktans og en kapasitans.