Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2009, uke 4

Onsdag 21.01.09 og fredag 23.01.09

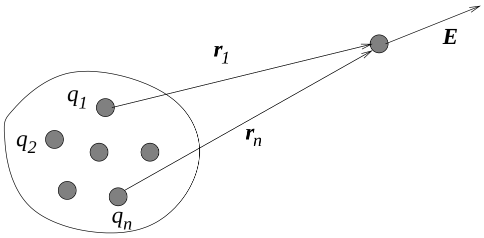
Elektrisk felt fra punktladning

[FGT 22.1; YF 21.4; TM 21.4; AF 21.6; LHL 19.5; DJG 2.1.3]

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Superposisjonsprinsipp for elektrisk felt:

$$\boldsymbol{E} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{E}_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j}{r_j^2}\hat{r}_j$$



Kontinuerlige ladningsfordelinger

[FGT 21.4, 22.3; YF 21.5; TM 22.1; AF eks. 21.6; LHL 19.5; DJG 2.1.4]

På en lengdeskala som er stor i forhold til avstanden mellom enkeltladninger ser man en tilnærmet *kontinuerlig* ladningsfordeling. (På samme måte som at makroskopiske objekter har en tilnærmet kontinuerlig massefordeling, selv om de egentlig består av "enkeltmasser" (atomer).)

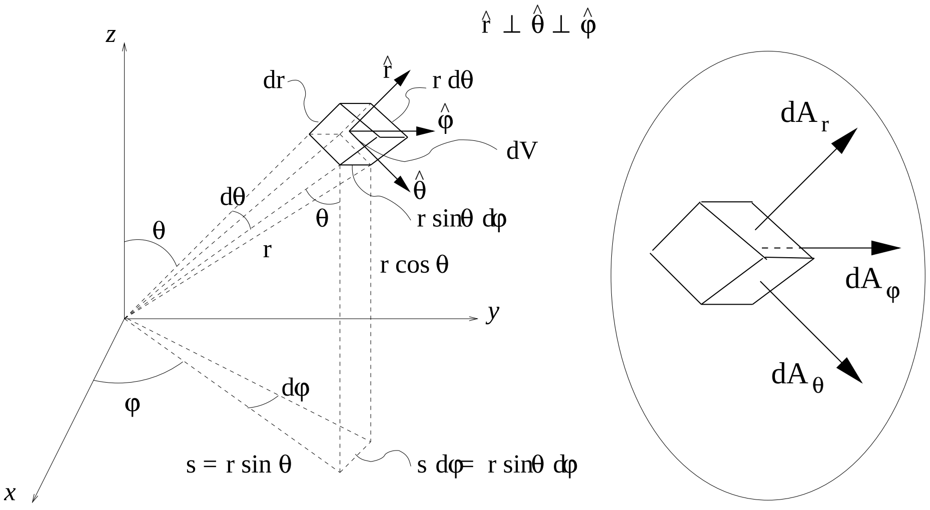
Sum over enkeltladninger erstattes da av *integral* over en ladningsfordeling:

$$\sum_i \Delta q_i \overset{\Delta q_i \to 0}{\longrightarrow} \int dq$$

$3D$ (= 3 dimensjoner): romladning

$$\begin{aligned}
dq &= \rho\, dV \\
\rho &= \rho(x,y,z) = \text{ ladning pr volumenhet } = \text{ romladningstetthet} \\
[\rho] &= [q/V] = \mathrm{C/m^3} \\
\text{Volumelement : } dV &= dx\, dy\, dz \ \ \text{(kartesiske koordinater)} \\
&= r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr \ \ \text{(kulekoordinater)} \\
&= s\, ds\, d\phi\, dz \ \ \text{(sylinderkoordinater)}
\end{aligned}$$

Volumelement dV i kulekoordinater:



dV = (dr) (r dθ) (r sin θ dφ)

$2D$: flateladning

$$\begin{aligned}
dq &= \sigma\, dA \\
\sigma &= \sigma(x,y) = \text{ ladning pr flateenhet } = \text{ flateladningstetthet} \\
[\sigma] &= [q/A] = \mathrm{C/m^2} \\
\text{Flateelement : } dA &= dx\, dy \ \text{ (kartesiske koordinater)} \\
&= r\, d\phi\, dr \ \text{ (polarkoordinater)}
\end{aligned}$$

$1D$: linjeladning

$$\begin{aligned}
dq &= \lambda\, dl \\
\lambda &= \lambda(x) = \text{ ladning pr lengdeenhet } = \text{ linjeladningstetthet} \\
[\lambda] &= [q/L] = \mathrm{C/m} \\
\text{Linjeelement : } dl &= dx \ \text{ (rett linje)} \\
&= R\, d\phi \ \text{ (for sirkel med radius } R\text{)}
\end{aligned}$$

Elektrisk felt i avstand $\boldsymbol{r}$ fra infinitesimal ladning dq:

$$d\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

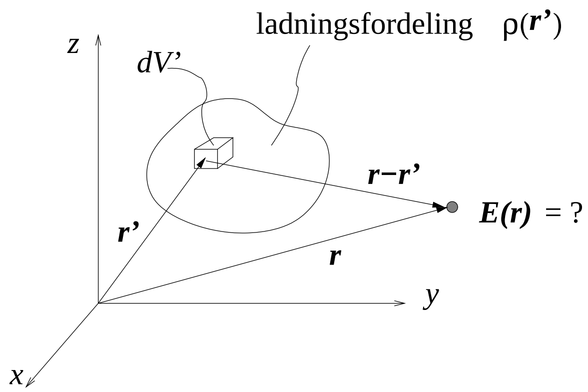
Elektrisk felt fra kontinuerlig ladningsfordeling:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\hat{r}\,dq}{r^2} \overset{3D}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\hat{r}\rho\,dV}{r^2}$$

Mer presist: Det elektriske feltet $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ i et punkt $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ på grunn av en fordeling av elektrisk ladning beskrevet ved ladningstettheten $\rho(\boldsymbol{r}') = \rho(x', y', z')$ er gitt ved

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\,dV'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

der $dV' = dx'\,dy'\,dz'$ (i kartesiske koordinater) er et volumelement i posisjon $\boldsymbol{r}'$.
Legg merke til at $\boldsymbol{r}$ ikke har samme betydning i de to siste ligningene. I den første angir $\boldsymbol{r}$ vektoren fra dq til punktet der $\boldsymbol{E}$ skal bestemmes. Dermed vil $\boldsymbol{r}$ være forskjellig for de ulike ladningselementene dq i systemet vi ser på. I den andre ligningen angir $\boldsymbol{r}$ posisjonen der $\boldsymbol{E}$ skal bestemmes, mens $\boldsymbol{r}'$ er posisjonsvariabelen til ladningstettheten ρ. Her hadde vi valget mellom å innføre en ny vektor $\boldsymbol{\mathcal{R}} \equiv \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ og skrive $\hat{\boldsymbol{\mathcal{R}}}/\mathcal{R}^2$, eller (som vi valgte) å skrive om enhetsvektoren. På sin plass med en figur, kanskje:



Vi ser at den "aktuelle" enhetsvektoren skal peke fra volumelementet dV' i posisjon $\boldsymbol{r}'$ til posisjonen $\boldsymbol{r}$. Vi kan dermed skrive $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3$ i uttrykket for $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$.

Elektriske feltlinjer
[FGT 22.2; YF 21.6; TM 21.5; AF 21.6; LHL 19.6; DJG 2.2.1]

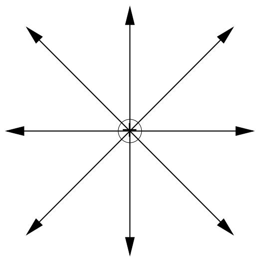
- gir en visuell framstilling av $\boldsymbol{E}$ i et område
- $\boldsymbol{E}$ ligger tangentielt til feltlinjene overalt
- styrken på $\boldsymbol{E}$ (dvs $|\boldsymbol{E}|$) er proporsjonal med tettheten av feltlinjer, dvs antall feltlinjer pr flateenhet

Konsekvenser av dette er bl.a. at

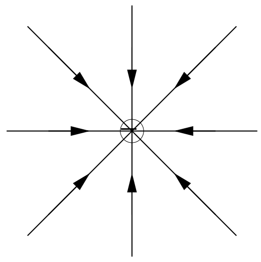
- feltlinjene går radielt *ut fra* positive (punkt-)ladninger og radielt *inn mot* negative ladninger
- like mange feltlinjer går ut fra ladning $+Q$ som inn mot $-Q$

Eksempler:

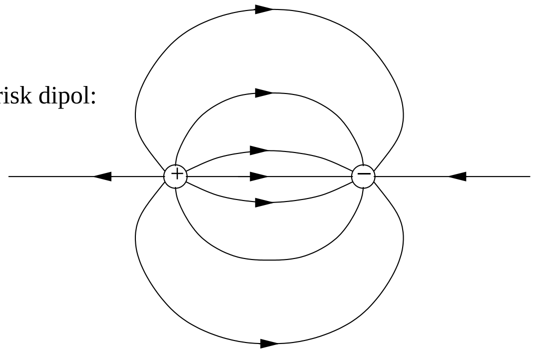
positiv punktladning:



negativ punktladning:



elektrisk dipol:



Elektrisk dipol og elektrisk dipolmoment
[FGT 22.1; YF 21.7; TM 21.4; AF 21.11; LHL 19.10; DJG 2.2.1, 3.4.2]

Dersom vi har to ladninger q og $-q$ i en viss innbyrdes avstand, har vi en elektrisk dipol. Avstandsvektoren $\boldsymbol{d}$ fra den negative ladningen $-q$ til den positive ladningen q beskriver hvordan de to er lokalisert i forhold til hverandre.
Dipolens elektriske *dipolmoment* $\boldsymbol{p}$ er da:

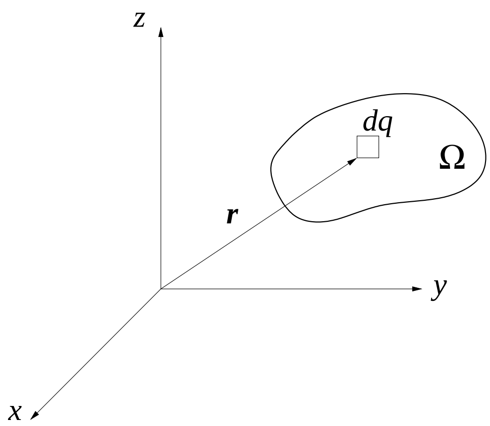
$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$

Dipolmomentet er altså en *vektor* som peker fra den negative mot den positive ladningen, med størrelse lik produktet av ladningen q og avstanden d.
SI-enhet for elektrisk dipolmoment: $[p] = [qd] = \text{Cm}$.
Mye brukt alternativ enhet for elektrisk dipolmoment: 1 D (debye) $\simeq 3.336 \cdot 10^{-30}$ Cm.

Mer generelt kan vi definere det elektriske dipolmomentet for en vilkårlig (kontinuerlig) ladningsfordeling innenfor et romlig område Ω:

$$\boldsymbol{p} = \int_\Omega \boldsymbol{r}\, dq$$

Her kan Ω være et område i 1, 2 eller 3 dimensjoner.



I 1D ("linjeladning"):

$$\begin{aligned} dq &= \lambda(x)\, dx \\ \boldsymbol{r} &= x\,\hat{x} \end{aligned}$$

I 2D ("flateladning"):

$$\begin{aligned} dq &= \sigma\, dA \\ &= \sigma(x,y)\, dx\, dy \quad \text{(kartesisk)} \\ & \sigma(r,\phi)\, r\, dr\, d\phi \quad \text{(polarkoord)} \\ \boldsymbol{r} &= x\,\hat{x} + y\,\hat{y} \quad \text{(kartesisk)} \\ & r\,\hat{r} \quad \text{(polarkoord)} \end{aligned}$$

I 3D ("romladning"):

$$\begin{aligned}
dq &= \rho\, dV \\
&= \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \quad \text{(kartesisk)} \\
& \quad \rho(r,\theta,\phi)\, r^2\, dr\, \sin\theta\, d\theta\, d\phi \quad \text{(kulekoord)} \\
\boldsymbol{r} &= x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z} \quad \text{(kartesisk)} \\
& \quad r\,\hat{r} \quad \text{(kulekoord)}
\end{aligned}$$

Dersom systemet består av n punktladninger $q_1, q_2, \ldots, q_n$ i posisjoner $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$, blir systemets elektriske dipolmoment

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i\, q_i$$

Det elektriske dipolmomentet $\boldsymbol{p}$ er bare entydig definert dersom systemet har null netto ladning, dvs

$$Q = \int_\Omega dq = 0$$

Da spiller det for eksempel ingen rolle hvor vi velger origo.

Dersom systemets nettoladning Q er forskjellig fra null, vil $\boldsymbol{p}$ avhenge av hvor vi plasserer origo (dvs $\boldsymbol{r} = 0$). Vi vil kun snakke om elektrisk dipol og dipolmoment i forbindelse med systemer med null nettoladning.