Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2009, uke 6

Onsdag 04.02.09 og fredag 06.02.09

Beregning av $\boldsymbol{E}$ fra V
[FGT 24.4; YF 23.5; TM 23.3; AF 21.10; LHL 19.9; DJG 2.3.1, 1.2.2]

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$

Gradientoperatoren ∇:

$$\begin{aligned}
\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} \ \ \text{(kartesiske koordinater)} \\
&= \frac{\partial V}{\partial s}\hat{s} + \frac{1}{s}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} \ \ \text{(sylinderkoordinater)} \\
&= \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi} \ \ \text{(kulekoordinater)}
\end{aligned}$$

Det er ikke et krav at du skal gå rundt og huske på hvordan gradientoperatoren ser ut i sylinder- og kulekoordinater. Den vil bli oppgitt dersom det f.eks. skulle bli bruk for den til eksamen. På den annen side: I hver eneste komponent gjenkjenner vi nevneren som den aktuelle komponenten av den aktuelle forflytningsvektoren $d\boldsymbol{l}$, med dx erstattet av ∂x osv. Eksempel: I sylinderkoordinater har vi

$$d\boldsymbol{l} = ds\,\hat{s} + s\,d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z},$$

og ϕ-komponenten av ∇V blir da

$$\frac{\partial V}{s\,\partial \phi}$$

Hvis vi for eksempel har kulesymmetri (dvs $\boldsymbol{E}$ og V kun avhengig av r, ikke av vinklene θ og ϕ):

$$\boldsymbol{E} = E(r)\hat{r} = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r}$$

Betydning av gradientoperatoren

Vektoren ∇V peker i den retningen som V øker raskest, dvs i den retningen der den *retningsderiverte* til V er størst. Ettersom $\boldsymbol{E} = -\nabla V$, betyr det at det elektriske feltet peker i den retningen som V *avtar* raskest.
Eksempel: Dersom en punktladning q plasseres et sted der $\nabla V = 0$, blir den ikke utsatt for noen elektrisk kraft, for da er $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} = -q\nabla V = 0$.

Ekvipotensialflater
[FGT 24.3; YF 23.4; TM 23.5; AF 21.11; LHL 19.11; DJG 2.3.2]

Ekvipotensialflater er flater i rommet med konstant potensial.

$$\Delta V = -\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

for *vilkårlig* integrasjonsvei på en ekvipotensialflate.
Dermed:

$$\boldsymbol{E} \perp \quad \text{ekvipotensialflate}$$

Oppsummering til nå

Coulombs lov (empirisk lov for kraft mellom to ladninger q og q' i innbyrdes avstand r):

$$\boldsymbol{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Elektrisk felt fra punktladning q (følger av definisjonen "kraft pr ladningsenhet"):

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q'} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Konservativ kraft:

$$\int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$$

er uavhengig av integrasjonsveien, dvs veien mellom punktene A og B. Dermed:

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

(dvs når vi integrerer rundt en *lukket* kurve)

Med definisjonen av $\boldsymbol{E}$ følger det da at det elektrostatiske feltet også er konservativt, dvs:

$$\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

er uavhengig av integrasjonsveien, og dermed

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

Dette er en av *Maxwells ligninger*. (Vel å merke, for statiske felt, dvs felt som ikke endrer seg med tiden. Og på integralform. Den tilsvarende ligningen på differensialform, $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$, er ikke pensum i dette innføringskurset, men vi får forhåpentlig tid til å komme litt inn på differensialformen av Maxwells ligninger på en Ekstratime senere i semeseteret.)
Et konservativt vektorfelt kan alltid avledes fra et skalart *potensial*:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$

Potensialforskjellen mellom to punkter A og B kan beregnes dersom vi kjenner det elektriske feltet i området mellom A og B:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

Superposisjonsprinsippet gjelder for elektrisk kraft $\boldsymbol{F}$ (eksperimentelt resultat):

$$\boldsymbol{F}_i = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_{ij}$$

= kraft på ladning q_i fra ladninger q_j $(j = 1, 2, \ldots n)$
Da følger det at superposisjonsprinsippet også gjelder for elektrisk felt $\boldsymbol{E}$,

$$\boldsymbol{E} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{E}_j$$

og for elektrisk potensial V,

$$V = \sum_{j=1}^{n} V_j$$

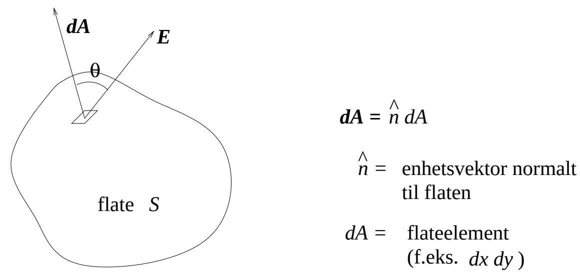
Her er $\boldsymbol{E}_j$ og V_j bidrag til henholdsvis felt og potensial fra ladning nummer j.

Elektrisk fluks
[FGT 23.1; YF 22.1, 22.2; TM 22.2; AF 25.3; LHL 19.7; DJG 2.2.1]

$$\phi = \int_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

Noen ganger skriver vi ϕ_E for å presisere at det er snakk om *elektrisk* fluks. Vi har tidligere definert elektriske feltlinjer slik at den elektriske feltstyrken $E = |\boldsymbol{E}|$ skulle være proporsjonal med tettheten av feltlinjer, eller antall feltlinjer pr flateenhet. Av ovenstående definisjon av elektrisk fluks ϕ kan vi da slutte at ϕ representerer antall feltlinjer som krysser flaten S.

Følgende figur illustrerer hva dette går ut på:



Flaten S er en vilkårlig "tenkt" eller "valgt" flate i rommet. Det elektriske feltet "eksisterer" i området der flaten S er "plassert". ($\boldsymbol{E}$ kan være null eller forskjellig fra null.) Flaten S tenkes så delt inn i små flateelementer $d\boldsymbol{A} = \hat{n}dA$, med areal dA og orientering i rommet spesifisert ved *flatenormalen* $\hat{n}$. Fluksen $d\phi$ gjennom flaten dA er da lik $\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$. Den totale fluksen gjennom hele flaten S får vi ved å integrere opp bidragene $d\phi$, altså ligningen over.

Merk at fluksen er en *skalar* størrelse. Den kan imidlertid være positiv eller negativ, avhengig av om vinkelen mellom vektorene $\boldsymbol{E}$ og $d\boldsymbol{A}$ er mindre eller større enn 90 grader.

En *lukket flate* S er en flate som omslutter et veldefinert volum V, f.eks. et kuleskall, et peanøttskall e.l. Den elektriske fluksen gjennom en lukket flate skriver vi slik (jfr. notasjonen for veiintegral rundt lukket kurve):

$$\phi = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

Ringen på integrasjonssymbolet understreker at det er snakk om en lukket flate.
Med en lukket flate kan vi gjøre unna "fortegnsproblemet" en gang for alle: Vi velger *positiv* retning på $d\boldsymbol{A}$ *ut av* flaten.
Dermed kan vi konkludere med at

$$\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} > 0 \;\;\Rightarrow\;\; \text{fluks ut gjennom flaten}$$
$$\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} < 0 \;\;\Rightarrow\;\; \text{fluks inn gjennom flaten}$$

Dessuten, når ϕ er fluks gjennom lukket flate:

$$\phi > 0 \;\;\Rightarrow\;\; \text{netto fluks ut gjennom flaten}$$
$$\phi < 0 \;\;\Rightarrow\;\; \text{netto fluks inn gjennom flaten}$$

For en *ikke lukket* flate S har vi ingen tilsvarende mulighet for å velge positiv retning på $d\boldsymbol{A}$. Flaten har to sider, og ingen av disse kan sies å være mer "inne" eller "ute" i forhold til den andre. I enkelte tilfeller velger vi imidlertid en positiv retning på (den lukkede!) kurven (linjen) som går rundt kanten av S. Da definerer vi positiv retning på $d\boldsymbol{A}$ ved hjelp av en *høyrehåndsregel*: La høyrehåndas fire øvrige fingre peke i positiv retning for flatens omsluttende kurve. Da peker tommelen i positiv retning for $d\boldsymbol{A}$.