Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2009, uke 7

Onsdag 11.02.09 og fredag 13.02.09

Gauss' lov

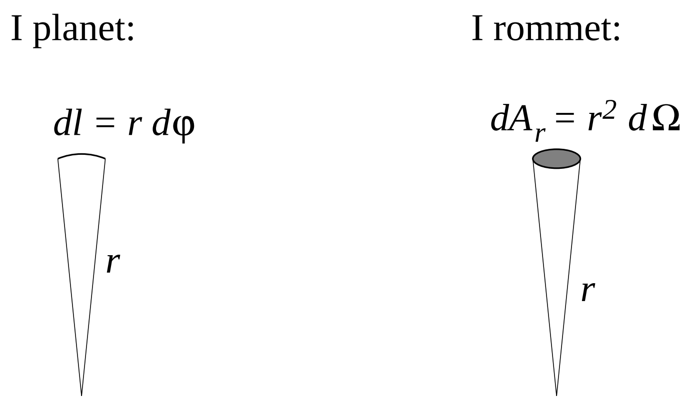
[FGT 23.2; YF 22.3; TM 22.2, 22.6; AF 25.4; LHL 19.7; DJG 2.2.1]

Gauss' lov (på såkalt integralform; senere i kurset, i en Ekstratime, skal vi se at vi også har en versjon av Gauss' lov på såkalt differensialform):

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = \frac{q_{\text{in}}}{\varepsilon_0}$$

Her er integralet på venstre side av ligningen et *flateintegral* over en *lukket* flate S, mens q_{in} er total (netto) ladning innenfor den lukkede flaten ("gaussflaten").
Gauss' lov er en av *Maxwells ligninger*. (Vi konsentrerer oss fremdeles om *elektrostatikk* en god stund framover, men faktisk er det slik at Gauss' lov også gjelder selv om $\boldsymbol{E}$ skulle finne på å variere med tiden.)
Innholdet i ligningen kan formuleres slik: Netto antall feltlinjer ut av et volum, dvs ut gjennom den lukkede flaten som avgrenser dette volumet, er bestemt av, og direkte proporsjonal med netto ladning inne i volumet, dvs innenfor den lukkede flaten.
Gauss' lov følger direkte av Coulombs lov (og representerer dermed egentlig ingen ny fysikk).

I forbindelse med beviset for Gauss' lov fikk vi bruk for det vi kalte en *romvinkel* Ω. På samme måte som en liten sektor i et plan utspenner en *vinkel* $d\phi$ vil en liten kjegle i rommet utspenne en *romvinkel* $d\Omega$. Videre: På samme måte som at buelengden dl i avstand r fra "sentrum" da blir $dl = r\ d\phi$ blir arealet dA_r av flaten som står normalt på $\boldsymbol{r}$ og som avgrenses av den lille kjeglen da lik $dA_r = r^2\ d\Omega$.



Lar vi sektoren i planet utspenne en hel omdreining, tilsvarer det en vinkel

$$\oint d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

Tilsvarende: Lar vi kjeglen i rommet utspenne en hel kuleflate, tilsvarer det en romvinkel

$$\oint d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = 4\pi$$

(Her har vi brukt kulekoordinater, der $dA_r = r^2 \sin\theta \ d\theta \ d\phi$ (se øving 3!), slik at $d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\phi$.)

Når er Gauss' lov spesielt nyttig?
[FGT 23.3; YF 22.4; TM 22.3; AF 25.4; LHL 19.7; DJG 2.2.3]

Gauss' lov kan brukes til å bestemme det elektriske feltet fra en ladningsfordeling der vi har en eller annen form for *symmetri*: Kulesymmetri, plansymmetri, sylindersymmetri, eller en kombinasjon av disse.

Sylindersymmetri: Se for eksempel øving 5, uendelig lang stav med uniform ladning λ pr lengdeenhet.

Kulesymmetri: I forelesningen så vi på en jevnt ladet kuleflate og fant at det elektriske feltet *inni* kula da var lik null, mens det *utenfor* kula var som om hele kuleflatens ladning Q var samlet i kulas sentrum, dvs

$$E(r) = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$$

Når vi har en kulesymmetrisk ladningsfordeling, innser vi at det elektriske feltet må bli radielt rettet, og dessuten at den elektriske feltstyrken $|\boldsymbol{E}|$ bare avhenger av avstanden r fra ladningsfordelingens sentrum (og ikke vinklene θ og ϕ, dvs hvor vi er på en gitt kuleflate). Vi innser da at det er lurt å velge nettopp en kuleflate med radius r som gaussflate for å bestemme $E(r)$, fordi "flateelementvektoren" $d\boldsymbol{A}$ da er parallell med $\boldsymbol{E}$ på hele gaussflaten. Integralet i Gauss' lov blir da lett å løse:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = E(r) \cdot 4\pi r^2$$

Med kulesymmetrisk ladningsfordeling, dvs at ladningen pr volumenhet ρ bare er en funksjon av r' (og ikke θ' og ϕ'), blir det også lett å bestemme hvor mye ladning vi har innenfor gaussflaten:

$$\begin{aligned} q_{\text{in}}(r) &= \int_{r'<r} \rho(r') dV' \\ &= \int_{r'=0}^{r} \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \rho(r')(r')^2 \, dr' \sin\theta' \, d\theta' \, d\phi' \\ &= 4\pi \int_{r'=0}^{r} \rho(r') \, (r')^2 \, dr' \end{aligned}$$

Bare ladningstettheten $\rho(r')$ ikke er en altfor "slem" funksjon, klarer vi som regel å løse det siste integralet over r'. Vi ser f.eks. at med konstant ρ, vil $q_{\text{in}}(r) \sim r^3$, og hvis $\rho(r') \sim r'$ (lineært voksende), vil $q_{\text{in}}(r) \sim r^4$. I førstnevnte tilfelle vil dermed $E(r) \sim r$, i sistnevnte tilfelle vil $E(r) \sim r^2$.
Merk at hvis r er så stor at hele ladningen Q ligger innenfor gaussflaten (dvs: $\rho(r') = 0$ for $r' > r$), vil vi alltid ha $E(r) = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$, dvs som om hele ladningen var samlet i sentrum. Dette resultatet er spesielt for kulesymmetri.

Plansymmetri: Et annet viktig eksempel er et jevnt ladet, uendelig stort plan. Vi viste da at dersom planet har ladning σ pr flateenhet, blir det elektriske feltet

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

dvs uavhengig av avstanden til planet. I dette tilfellet innser vi for det første at $\boldsymbol{E}$ overalt må stå vinkelrett på det ladede planet, og dessuten at feltstyrken $|\boldsymbol{E}|$ i hvert fall ikke kan avhenge av annet enn avstanden til planet. Med det som utgangspunkt innser vi at en lur gaussflate må bli en fyrstikkeske eller sylinder som gjennomskjæres på midten av det ladede planet. Da har vi at flateelementvektoren $d\boldsymbol{A}$ er parallell med $\boldsymbol{E}$ på gaussflatens to endeflater som er parallelle med det ladede planet, mens $d\boldsymbol{A}$ står vinkelrett på $\boldsymbol{E}$ på resten av gaussflaten. Integralet i Gauss' lov reduserer seg dermed til $2EA$, der A er arealet av gaussflatens nevnte endeflater. Ladningen innenfor en slik gaussflate blir $\sigma\,A$, ettersom et areal A av den ladede flaten nå ligger innenfor gaussflaten. Dermed finner vi at E er konstant, og altså heller ikke avhengig av avstanden til det ladede planet!

Det var deretter ikke vanskelig å bestemme det elektriske feltet fra to parallelle plan med motsatt ladning, $\pm\sigma$ (begge planene fremdeles uendelig store). Bruk av superposisjonsprinsippet gav

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

i området mellom planene, og

$$E = 0$$

i området på utsiden av planene. Mellom planene er feltet rettet fra det positive til det negative planet.
Dette siste eksemplet er meget relevant: Det representerer en såkalt *parallellplatekondensator*, der platenes areal er stort i forhold til avstanden mellom dem. Vi skal komme tilbake til dette eksemplet mange ganger.

Materialer og elektriske egenskaper

Hovedinndeling av materialer med hensyn på deres elektriske egenskaper:

- Ledere: Metaller. Atomenes ytterste elektron(er) er *fri* til å bevege seg gjennom lederen. Eksempler: Cu, Al, Ag etc.
- Isolatorer: Alle elektroner er *bundet* til atomene. Eksempler: glass, plast etc.

  Videre:
- Halvledere: Er isolator ved $T = 0$ (dvs null temperatur), men enkelte elektroner frigjøres ved $T > 0$. Viktige materialer i elektroniske komponenter (f.eks. dioder, transistorer). Eksempler: Si, Ge, GaAs.

  Dessuten:
- Superledere, Plasma, Elektrolytter etc.

Kommentar: Metaller er *gode* elektriske ledere. Endel andre materialer (som f.eks. grafitt) er *dårlige* ledere. Senere i kurset, i forbindelse med elektrisk strøm og elektriske kretser, skal vi tallfeste dette ved hjelp av materialets *elektriske ledningsevne*. Isolatorer som plast, glass og tre har veldig liten elektrisk ledningsevne. Den er riktignok ikke eksakt lik null, men mange størrelsesordener mindre enn for metaller. Mer om dette senere.

I dette kurset skal vi kun ta for oss ledere og isolatorer. En isolator kalles også for et *dielektrikum*. Vi ser først på elektriske ledere.

Elektriske ledere
[FGT 23.4; YF 21.2, 22.5; TM 21.2, 22.5; AF 25.5; LHL 19.2, 19.8; DJG 2.5]

I forelesningene beviste vi følgende 7 viktige resultater hva angår elektrisk felt, potensial og fordeling av netto ladning på en elektrisk leder i *elektrostatisk likevekt*:

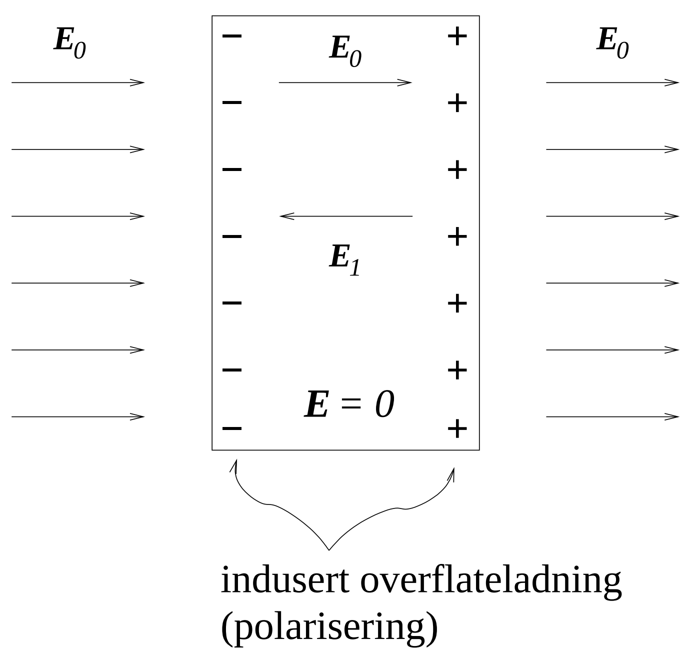
1. Inne i lederen er $\boldsymbol{E} = 0$.
2. Det er null netto ladning inne i lederen.
3. All netto ladning fordeler seg på overflaten av lederen.
4. På lederens overflate står det elektriske feltet normalt på overflaten.
5. Hele lederen, både inni og på overflaten, har samme verdi av det elektriske potensialet V, dvs lederen er et *ekvipotensial*.
6. På lederens overflate er det elektriske feltet $E = \sigma/\varepsilon_0$, der σ er ladning pr flateenhet på lederens overflate.

7. En leder med et (tomt!) hulrom har $E = 0$ inne i hulrommet og all netto ladning på den ytre overflaten. (Dette gjelder selvsagt ikke dersom vi har netto ladning inne i hulrommet, f.eks. en punktladning.)

Kommentar: Vi brukte Gauss' lov til å bevise at all netto ladning må fordele seg på lederens overflate. Vi kunne også ha argumentert for dette resultatet med utgangspunkt i *energien*, nemlig at netto ladning må plassere seg slik at systemets potensielle energi blir minimal. Nå er det vel ikke intuitivt opplagt at lavest energi oppnås med all netto ladning på overflaten? Kanskje vi kunne "tjene" noe på å fordele litt av ladningen utover lederens *volum*? Vel, det er altså *ikke* tilfelle. Enhver elektrisk leder, uansett størrelse og form, vil alltid ha lavest potensiell energi når all netto ladning fordeler seg på overflaten.

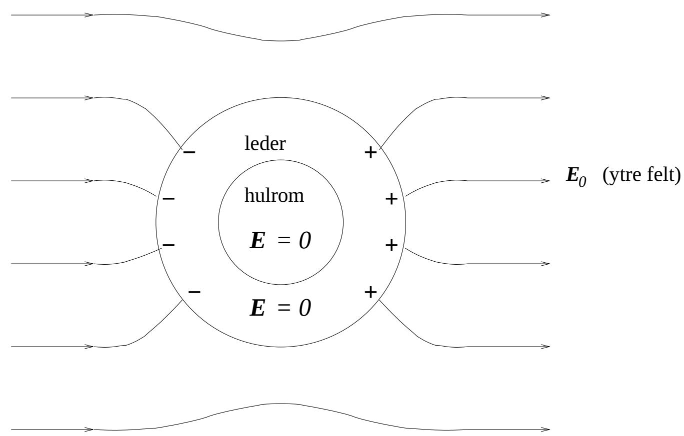
Leder i ytre felt (dette ble forelest onsdag 18.02.09)

Et ytre felt $\boldsymbol{E}_0$ påvirker fri ("mobile") ladninger i lederen med elektrisk kraft. Endel av disse ladningene beveger seg til lederens overflate slik at *indusert felt* $\boldsymbol{E}_1$ akkurat kansellerer ytre ("påtrykt") felt: $\boldsymbol{E}_1 = -\boldsymbol{E}_0$. Dermed blir totalt elektrisk felt $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_1 = 0$ inne i lederen, slik vi har bevist at det må være.



Leder med hulrom i ytre felt

Elektrostatisk felt inne i hulrom i leder plassert i ytre felt $\boldsymbol{E}_0$ er lik null:



Dvs: Inne i hulrommet har vi elektrostatisk *skjerming* mot det ytre feltet.
For å være sikker på perfekt skjerming, må vi ha et "ekte" hulrom, dvs et avgrenset volum, som f.eks. inne i en fotball. I praksis får vi veldig god skjerming selv med åpninger inn til hulrommet, jfr faradayburet som dere bruker på laben. Andre eksempler er bil og fly.

Merk at den elektriske lederen skjermer et *ytre* felt slik at $E = 0$ inne i (det tomme) hulrommet, mens det omvendte ikke er tilfelle: Lederen skjermer ikke feltet fra en eventuell ladning inne i hulrommet. Da blir $E \neq 0$ både inne i hulrommet og utenfor lederen, men selvsagt $E = 0$ inne i lederen.