Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektrisitet og magnetisme
Vår 2009, uke 9

Onsdag 25.02.09 og fredag 27.02.09

Kondensator og kapasitans.
[FGT 25.1, 25.5; YF 24.1, 24.4; TM 24.2, 24.5; AF 25.10; LHL 20.1; DJG 2.5.4]

Kondensator = to adskilte elektriske ledere med ladning $\pm Q$ (Eventuelt: En elektrisk leder med ladning Q, den andre tenkt flyttet uendelig langt bort.)

Coulombs lov $\Rightarrow$ elektrisk felt i området omkring lederne er proporsjonalt med Q

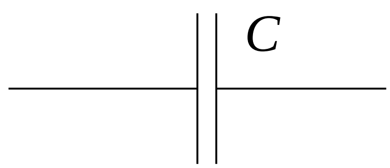
Dermed følger også at *potensialforskjellen* ΔV mellom de to lederne er proporsjonal med Q:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

C = kondensatorens *kapasitans*

Enhet for kapasitans: $[C] = [Q/\Delta V] = \mathrm{C/V} \equiv \mathrm{F}$ (farad)

Symbol i elektriske kretser:



Kapasitansen C til en kondensator er en *geometrisk faktor*, avhengig av ledernes utforming og innbyrdes avstand, og dessuten det mellomliggende mediet.
Kapasitans er, pr definisjon, en *positiv* størrelse.
Utregning av C for et gitt system vil gå ut på å bestemme potensialforskjellen mellom de to lederne, $\Delta V = V_+ - V_-$, for en gitt ladning $\pm Q$.

Parallellplatekondensator, luftfylt (vakuum), med plateareal A, plateavstand d: Ladning $\pm Q$ på de to platene gir elektrisk feltstyrke $E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/\varepsilon_0 A$ mellom platene, og dermed potensialforskjell $V = Ed = Qd/\varepsilon_0 A$ mellom platene. Med definisjonen $C = Q/V$ har vi da en kapasitans

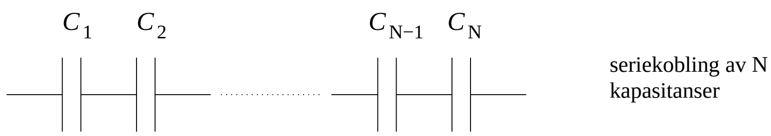
$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

Parallellplatekondensator, fylt med dielektrikum med relativ permittivitet ε_r, plateareal A, plateavstand d: Ladning $\pm Q$ på de to platene gir elektrisk forskyvning $D = Q/A$ mellom platene, og dermed elektrisk feltstyrke $E = D/\varepsilon_r\varepsilon_0 = Q/A\varepsilon_r\varepsilon_0$ mellom platene, og dermed potensialforskjell $V = Ed = Qd/\varepsilon_r\varepsilon_0 A$ mellom platene. Dermed kapasitans

$$C = \varepsilon_0\varepsilon_r \frac{A}{d}$$

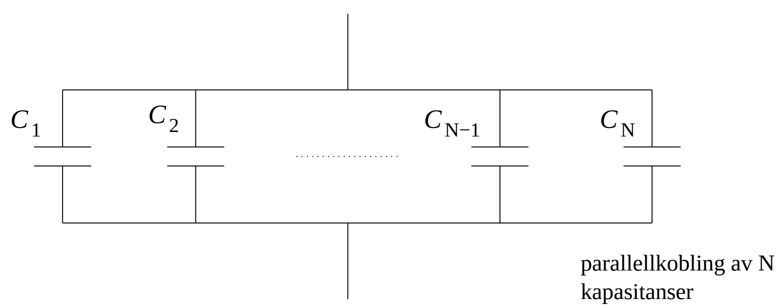
Dersom området mellom kondensatorens to ledere, som i utgangspunktet er fylt med luft ($\simeq$ vakuum), helt eller delvis fylles med et dielektrikum, vil kondensatorens kapasitans alltid bli større enn den var med bare luft. (Det samme gjelder også hvis området med luft/vakuum erstattes med metall.)

Kobling av flere kapasitanser
[FGT 25.4; YF 24.2; TM 24.4; AF Ex. 25.8, LHL 20.2]:



Seriekobling av N kapasitanser C_i, $i = 1, .., N$:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}$$



Parallellkobling av N kapasitanser C_i, $i = 1, .., N$:

$$C = \sum_{i=1}^{N} C_i$$

I disse uttrykkene representerer C den ekvivalente kapasitansen dersom vi erstatter alle de serie- eller parallellkoblede kapasitansene med en enkelt kapasitans.

Energi assosiert med elektrisk felt
[FGT 25.3; YF 24.3; TM 24.3; AF 25.11; LHL 20.4; DJG 2.4.3]

Vi regnet ut arbeidet W som skal til for å lade opp en parallellplatekondensator fra $q = 0$ til endelig ladning $q = Q$. (Egentlig: $\pm Q$) Dette arbeidet tilsvarer potensiell energi lagret i kondensatoren. Vi fant:

$$W = U = \int_0^Q v(q)dq = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{Q^2}{2C}$$

Her var utgangspunktet at det trengs et arbeid $dW = v(q)dq$ for å øke kondensatorens ladning fra $\pm q$ til $\pm(q + dq)$. $v(q)$ er potensialforskjellen mellom platene når de har ladning $\pm q$. Med sammenhengen $C = Q/V$ har vi de alternative uttrykkene

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$$

Bruker vi det siste av disse og setter inn $C = \varepsilon_0 A/d$ og $V = Ed$, finner vi

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \cdot (Ad)$$

Ettersom faktoren Ad er volumet der vi har et elektrisk felt, er vi framme ved et resultat som viser seg å gjelde generelt:
Potensiell energitetthet, dvs potensiell energi pr volumenhet, i elektrisk felt E er lik

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Vi hadde også at potensiell energi kunne "assosieres" med den elektriske ladningen: Dersom et "system" har elektrisk potensial (f.eks. relativt til potensialet uendelig langt borte, som vi som regel kan sette lik null) $v(q)$ når det har ladning q, må vi utføre et arbeid $dW = v(q)\,dq$ for å øke ladningen fra q til $q + dq$. Følgelig blir totalt arbeid, og dermed også total "lagret" potensiell energi i systemet, lik

$$W = U = \int_0^Q v(q)\,dq$$

for å lade opp systemet fra null ladning til endelig ladning Q.
Alternativt kan vi altså regne ut lagret potensiell energi ved å integrere opp energitettheten u over hele volumet V:

$$U = \int_V u\,dV = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\,dV$$

(Merk at her står V for *volum* og ikke potensial. Dessuten: Ikke la deg forvirre av notasjonen brukt ovenfor: Jeg brukte $v(q)$ for å angi potensialforskjellen mellom de to kondensatorplatene med ladning q og $-q$, dvs på et vilkårlig tidspunkt underveis i oppladingen. Grunnen var at jeg ønsket å reservere V for potensialforskjellen mellom platene når de var ferdig oppladet, dvs med ladning Q og $-Q$. Jeg forsøker å minimere "sammenblanding" av symboler, men V bruker jeg altså for potensial *og* volum.)

Og dermed har vi kommet oss gjennom det som er pensum til midtsemesterprøven fredag 13. mars.

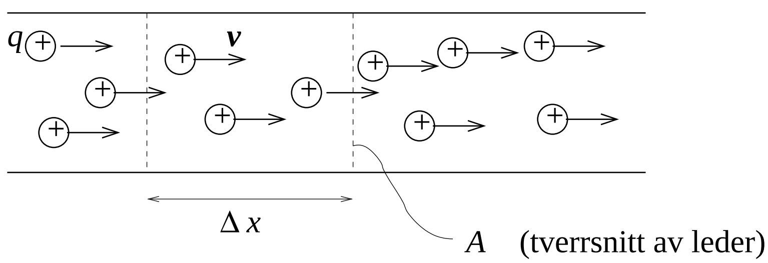
Elektrisk strøm.
[FGT 26.1; YF 25.1; TM 25.1; AF 24.1, 24.2; LHL 21.1; DJG 5.1.3]

Elektrisk strømstyrke = (positiv) ladning som passerer gjennom tverrsnitt av leder pr tidsenhet. I *metall* er *elektroner* ladningsbærerne, med ladning $-e$. Da går partikkelstrømmen og den elektriske strømmen i motsatt retning.

Med ladning ΔQ som passerer tverrsnitt A på tiden Δt:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \overset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} \frac{dQ}{dt}$$

Enhet for strømstyrke: $[I] = [Q/t] = \mathrm{C/s} = \mathrm{A}$ (ampere)



Med $n = \Delta N/\Delta V$ ladningsbærere pr volumenhet, med midlere *driftshastighet* $\boldsymbol{v}$ og ladning q:

$$\Delta Q = q\Delta N = nq\Delta V = nq\Delta x A$$

$$\Rightarrow I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nqA\frac{\Delta x}{\Delta t} = nqAv$$

Strømtetthet = strøm pr flateenhet:

$$j = \frac{I}{A}$$

Dermed:

$$j = nqv$$

Både strømtetthet j og driftshastighet v er vektorer:

$$\boldsymbol{j} = nq\boldsymbol{v}$$

Dersom vi også betrakter tverrsnittet A som en vektor, blir I en *skalar* størrelse:

$$I = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{A}$$

Strømmen I har da kun retning i forhold til lederen (positiv eller negativ).

Generalisering, dersom $\boldsymbol{j}$ ikke er konstant over lederens tverrsnitt:

$$I = \int_S \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{A}$$