Institutt for fysikk, NTNU
TFY4160/FY1002 Bølgefysikk
Høst 2006

Løsningsforslag til øving 1

Veiledning 24. august

Oppgave 1

a) Vi antar (selv om det ikke er spesifisert i oppgaveteksten) at Hookes lov, $F = kx$, gjelder for fjæra. Newtons andre lov gir da

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

eller

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

med $\omega^2 = k/m$. Ligningen har løsning $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, som gitt i oppgaveteksten. Klossen svinger altså med vinkelfrekvens $\omega = \sqrt{k/m}$.
Amplituden A og fasekonstanten ϕ fastlegger vi ved å bruke de oppgitte initialbetingelsene $x(0) = x_0$ og $v(0) = \dot{x}(0) = v_0$. Vi har

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$

slik at

$$x_0 = A\cos\phi$$

og

$$v_0 = -\omega A\sin\phi$$

Herfra er det flere mulige veier å gå. Vi kan for eksempel dele disse to ligningene med hverandre, som gir

$$\phi = -\arctan\frac{v_0}{x_0\omega}$$

og

$$A = \frac{x_0}{\cos\arctan v_0/x_0\omega}$$

Alternativt kan vi kvadrere de to ligningene og legge dem sammen:

$$\sin^2\phi + \cos^2\phi = \frac{v_0^2}{\omega^2 A^2} + \frac{x_0^2}{A^2}$$

som gir

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} = x_0\sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2}$$

og deretter

$$\phi = \arccos\frac{x_0}{A} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2}}$$

b) Siden vi ikke har noen demping (friksjon) i systemet, er den totale energien E bevart. (Dvs: vi har et *konservativt* system.) Da kan vi beregne energien ved et hvilket som helst tidspunkt, for eksempel ved maksimalt utsving, der $x = x_{\max} = A$ og $v = 0$:

$$E = E_p^{\max} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}k\left(x_0^2 + mv_0^2/k\right) = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$$

Det endelige svaret her gjenkjenner vi som summen av potensiell og kinetisk energi ved $t = 0$, $E_{p0} + E_{k0}$, hvilket jo også må tilsvare den totale energien.

c) Skriver vi løsningen på formen $x(t) = B\cos\omega t + C\sin\omega t$, har vi

$$\dot{x}(t) = -\omega B\sin\omega t + \omega C\cos\omega t$$

og dermed

$$B = x_0$$

og

$$C = v_0/\omega$$

d) Maksimalt utsving:

$$x_{\max} = A = x_0\sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2} = x_0\sqrt{1 + E_{k0}/E_{p0}}$$

Maksimal hastighet:

$$v_{\max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}\left(x_0^2 + mv_0^2/k\right)} = v_0\sqrt{1 + kx_0^2/mv_0^2} = v_0\sqrt{1 + E_{p0}/E_{k0}}$$

Med oppgitte tallverdier:

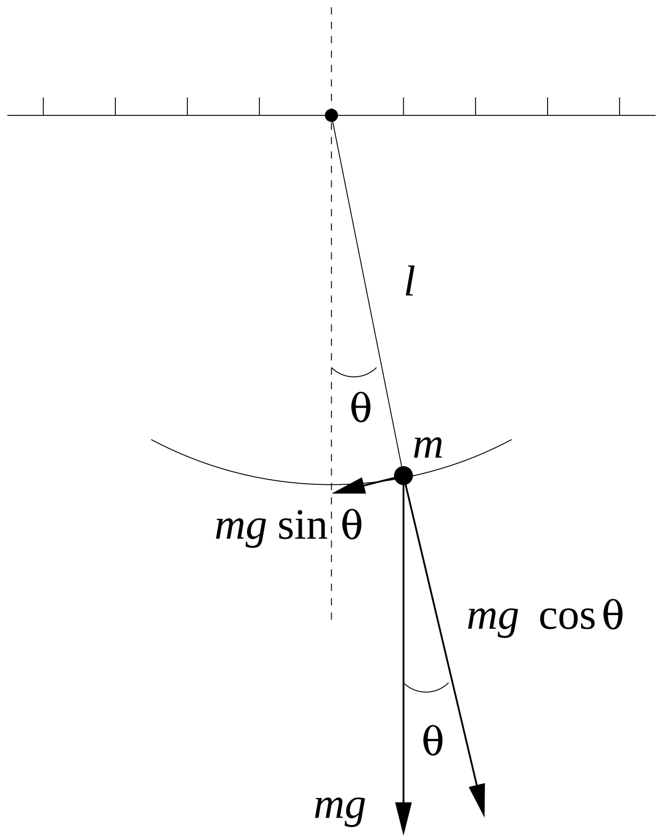
$$E_{p0} = 0.5 \cdot 100 \cdot 0.010^2 = \frac{1}{200}$$

$$E_{k0} = 0.5 \cdot 0.25 \cdot 0.20^2 = \frac{1}{200}$$

begge i enheten J, ettersom vi kun har brukt SI–enheter underveis. Følgelig er $x_{\max} = \sqrt{2}x_0 \simeq 1.4$ cm og $v_{\max} = \sqrt{2}v_0 \simeq 28$ cm/s.

Oppgave 2

a) Figuren nedenfor viser kule og snor når snora danner en vinkel θ med vertikalretningen.



Den vertikale tyngdekraften mg kan dekomponeres i en komponent i snoras lengderetning, $mg\cos\theta$, og en komponent tangentielt til svingebevegelsens (sirkulære) bane, $mg\sin\theta$. Førstnevnte komponent utlignes av snordraget (ikke tegnet inn i figuren), ettersom det ikke er noen bevegelse i snoras lengderetning. Sistnevnte komponent bestemmer bevegelsen via Newtons andre lov,

$$-mg\sin\theta = ma$$

Her har vi valgt positiv retning mot klokka, dvs positiv verdi for θ samt positiv posisjon når utsvinget er som i figuren over. Vi ser at kraften alltid vil virke i motsatt retning av utsvinget, og det er ivaretatt med minustegnet i bevegelsesligningen. For bevegelse i sirkulær bane med radius l har vi følgende sammenheng mellom lengde ds og vinkelendring $d\theta$: $ds = l\,d\theta$. Hastigheten er dermed

$$v = \frac{ds}{dt} = l\frac{d\theta}{dt}$$

og akselerasjonen

$$a = \frac{dv}{dt} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Innsetting gir da

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

b) Siste ligning i punkt a kan løses eksakt, slik at frekvens og periode kan uttrykkes ved et såkalt elliptisk integral. Men dersom utsvinget ikke er for stort, vil θ hele tiden være liten, slik at vi tilnærmet kan skrive $\sin\theta \simeq \theta$. Bevegelsesligningen forenkler seg da til

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

som er på samme form som den vi kjenner for posisjonen $x(t)$ i "masse–fjær-systemet. Vi må dermed ha en harmonisk løsning

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$

for vinkelen θ, der vinkelfrekvensen er $\omega = \sqrt{g/l}$. Svingebevegelsens periode blir altså

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Vi ser at kulas masse m ikke har noen innvirkning på svingetiden. Dessuten har vel alle erfart at en kort pendel svinger raskere enn en lang en.

Kommentar: Den beregnede svingetiden blir en dårligere og dårligere tilnærmelse jo større pendelens utsving er. Den eksakte løsningen kan skrives som en (uendelig) potensrekke i vinkelamplituden θ_0, der de første par leddene ser slik ut:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \frac{11\theta_0^4}{3072} + ...\right)$$

Her må vi selvsagt bruke enheten radianer for vinkelen θ_0.