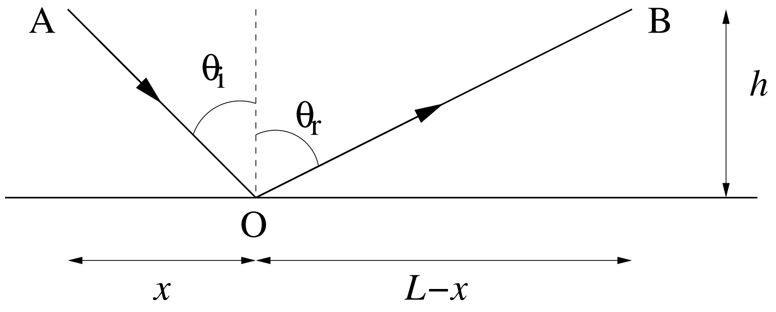
Institutt for fysikk, NTNU
TFY4160/FY1002 Bølgefysikk
Høst 2006

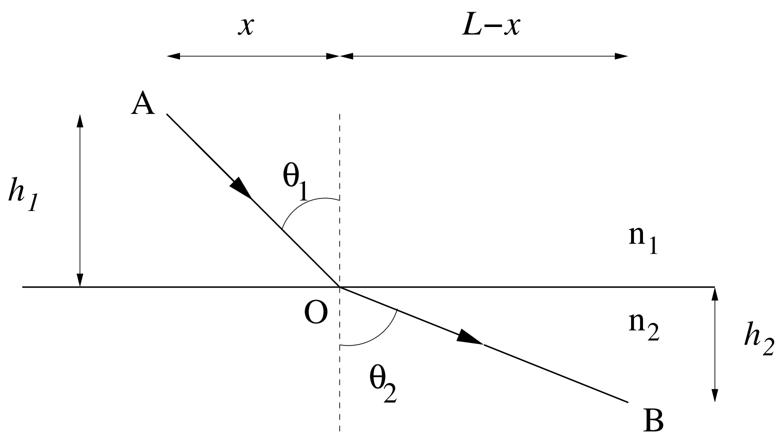
Løsningsforslag til øving 10

Veiledning 2. november

Oppgave 1



Figur 1. Fermats prinsipp og refleksjon



Figur 1. Fermats prinsipp og brytning

Fermats prinsipp og refleksjon:

Veistrekningen fra A via O til B er

$$s = \sqrt{x^2 + h^2} + \sqrt{(L-x)^2 + h^2}$$

Hele veien ligger i medium 1, slik at lyshastigheten ikke endrer seg. Dermed blir det ett fett om vi minimerer tidsbruken eller veilengden. Vi finner minste veistrekning ved å derivere s mhp x og sette uttrykket lik null:

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dx} &= \frac{2x}{\sqrt{x^2+h^2}} - \frac{2(L-x)}{\sqrt{(L-x)^2+h^2}} = 0 \\
\Rightarrow 2x\sqrt{(L-x)^2+h^2} &= 2(L-x)\sqrt{x^2+h^2} \\
\Rightarrow 4x^2(L^2 - 2Lx + x^2 + h^2) &= (4L^2 - 8Lx + 4x^2)(x^2+h^2) \\
\Rightarrow 4L^2h^2 - 8Lxh^2 &= 0 \\
\Rightarrow x &= L/2 \\
\Rightarrow \theta_i &= \theta_r
\end{aligned}$$

Fermats prinsipp og brytning:

Hastighet i medium 1 er v_1 og i medium 2 v_2. Tidsforbruk fra A via O til B blir da

$$t = \frac{\sqrt{x^2+h_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(L-x)^2+h_2^2}}{v_2}$$

Finner minimal tid ved å derivere og sette lik null:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2x}{v_1\sqrt{x^2+h_1^2}} - \frac{2(L-x)}{v_2\sqrt{(L-x)^2+h_2^2}} = 0$$

Vi ser fra figuren at

$$\sin\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+h_1^2}}$$

mens

$$\sin\theta_2 = \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2+h_2^2}}$$

Dermed har vi uten videre

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

siden $v_1 = c/n_1$ og $v_2 = c/n_2$.

Huygens' prinsipp og refleksjon:

Både AB og A'B' er bølgefronter. Da må vi ha AA' = BB'. Vi ser fra figuren i oppgaveteksten at

$$\sin\theta_r = \frac{AA'}{AB'}$$

og at

$$\sin\theta_i = \frac{BB'}{AB'}$$

Men da er

$$\sin\theta_r = \sin\theta_i$$

og

$$\theta_r = \theta_i$$

Huygens' prinsipp og brytning:

Også her er både AB og A'B' bølgefronter. Da må tidsforbruket fra A til A' være like stort som tidsforbruket fra B til B', dvs

$$t_{\mathrm{AA'}} = \frac{AA'}{v_2} = t_{\mathrm{BB'}} = \frac{BB'}{v_1}$$

Fra figuren i oppgaveteksten ser vi at

$$\sin\theta_1 = \frac{BB'}{AB'}$$

og at

$$\sin\theta_2 = \frac{AA'}{AB'}$$

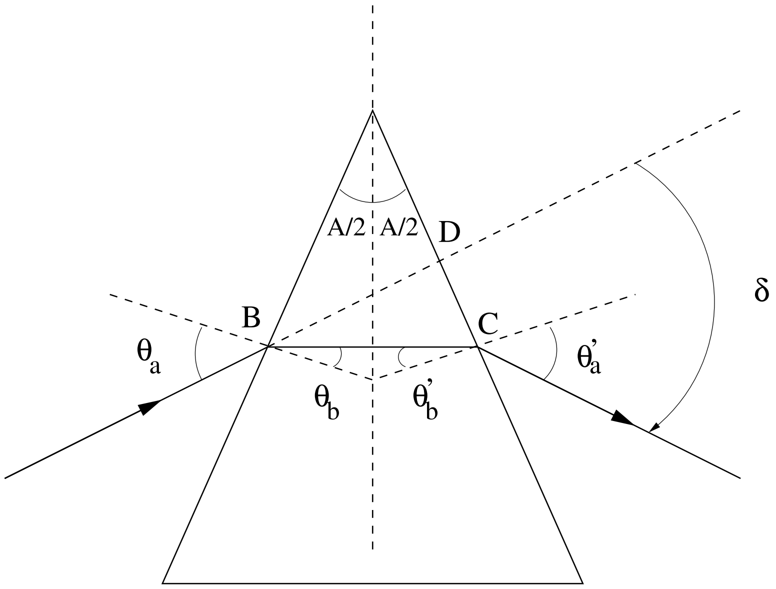
Dermed:

$$\frac{AB'\sin\theta_2}{v_2} = \frac{AB'\sin\theta_1}{v_1}$$

dvs

$$n_2\sin\theta_2 = n_1\sin\theta_1$$

Oppgave 2



a) Ved figurbetraktning ser vi

$$\theta_b = A/2$$

(Vinklenes høyre bein står normalt på hverandre, og det gjør også vinklenes venstre bein.)

$$\angle CBD = \frac{\delta}{2}$$

(Symmetrisk gjennomgang og derfor like stor brytning gjennom begge flater.) Dermed:

$$\theta_a = \frac{\delta}{2} + \theta_b = \frac{\delta}{2} + \frac{A}{2}$$

Fra Snells brytningslov:

$$\frac{\sin\theta_a}{\sin\theta_b} = \frac{n}{1} = n$$

Ved å kombinere disse ligningene finner vi

$$\underline{\underline{\sin\frac{\delta + A}{2}}} = \underline{\underline{n\,\sin\frac{A}{2}}}$$

som vi skulle vise.

b) $n = 1.62$ og $A = 60°$ gir

$$\sin\frac{\delta + A}{2} = n\sin\frac{A}{2} = 1.62 \cdot \frac{1}{2} = 0.81$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta + A}{2} = 54.1^\circ$$

og

$$\delta = 2 \cdot 54.1^\circ - 60.0^\circ = 48.2^\circ \simeq \underline{\underline{48^\circ}}$$

c) Fra punkt *b*:

$$\delta_i = 2 \arcsin \left(n_i \sin \frac{A}{2} \right) - A$$

med i = farge nr i, her rød eller fiolett, og $A = 60^\circ$. Innsetting av $n = 1.60$ for rød og $n = 1.64$ for fiolett gir

$$\delta_{\text{rød}} \simeq 46.3^\circ \quad , \quad \delta_{\text{fiolett}} \simeq 50.2^\circ$$

dvs en differanse på 3.9°.