Institutt for fysikk, NTNU
TFY4160/FY1002 Bølgefysikk
Høst 2006

Løsningsforslag til øving 12

Veiledning 16. november

Oppgave 1

Lysets bølgelengde endres fra λ i luft til $\lambda/n \simeq 3\lambda/4$ i vann. Dermed blir avstanden mellom intensitetsmaksima på observasjonsskjermen mindre. Eksempelvis vil avbøyningsvinkelen som svarer til 1. ordens maksimum endres fra $\arcsin(\lambda/d)$ i luft til $\arcsin(3\lambda/4d)$ i vann. Her er d avstanden mellom de to spaltene.

Oppgave 2

Uten plastfolie foran den ene spalten ville vi ha fått et intensitetsmaksimum på senterlinjen. (Null faseforskjell mellom delbølgene fra de to spaltene.) Ved å dekke den ene spalten med plast, har vi oppnådd en faseforskjell lik π mellom de to delbølgene, ettersom vi nå har null intensitet på senterlinjen. Dermed, med k_1 = bølgetall for lyset i plasten og k_0 = bølgetall for lyset i luft (og tilsvarende indekser for bølgelengder og brytningsindeks):

$$k_1 \cdot t - k_0 \cdot t = \pi$$

Vi bruker at $k = 2\pi/\lambda$ og at $\lambda_1 = \lambda_0/n_1$ og finner

$$t = \frac{\lambda_0}{2(n_1 - 1)} = \frac{630}{2 \cdot 0.8}\,\mathrm{nm} \simeq 394\,\mathrm{nm}$$

Men vent litt! Vi vet vel egentlig ikke annet enn at faseforskjellen mellom de to delbølgene må være et odde antall ganger π, dvs $(2m+1)\pi$, der m er lik null eller et helt tall. Vi har dermed flere muligheter: $t = (2m + 1) \cdot 394$ nm.

Oppgave 3

Oppløsningsevnen vil være bestemt av forholdet λ/D. Dette er uansett ingen skarpt definert grense, så det er ikke mye vits i å bruke $\arcsin(1.22\lambda/D)$. Vi finner:
a) For øyet mhp synlig lys: Anta f.eks. $D = 5$ mm og $\lambda = 500$ nm. Det gir at vinkelavstanden mellom de to objektene må være minst 0.0001 radianer eller ca 0.006 grader. (I praksis vil nok ofte atmosfæriske forstyrrelser føre til en betydelig større verdi.)
b) For optisk teleskop med diameter 8.3 m: $5 \cdot 10^{-7}/8.3 \simeq 6 \cdot 10^{-8}$ radianer eller ca 3 mikrograder.

c) For et radioteleskop med diameter 305 m og radiobølger med bølgelengde 21 cm: $0.21/305 \simeq 7 \cdot 10^{-4}$ radianer eller ca 0.04 grader.
En innser raskt fordelen ved å observere i den kortbølgede delen av spektret. Problemet med å gå til enda kortere bølgelengder er at denne strålingen i stor grad absorberes i atmosfæren. Alternativet da er å sette teleskopet på en satelitt og plassere den utenfor jordas atmosfære.

Oppgave 4

Intensitetsfordelingen ved diffraksjon fra en enkelt spalte med bredde a er gitt ved

$$I = \hat{I}\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$$

der $\beta = \pi a \sin\theta/\lambda$. Dersom vi dobler spaltebredden, vil β bli dobbelt så stor for en gitt avbøyningsvinkel θ. Første nullpunkt kommer ved halvparten så stor avbøyningsvinkel, så vinkelspredningen blir med andre ord halvert. Under utledning av denne intensitetsfordelingen antok vi at spalten med endelig bredde a kunne deles opp i et stort antall tynne spalter med veldig liten bredde a/N (slik at hver tynne spalte kunne betraktes som en ideell "Huygens-kilde" for sylinderbølger). Med I_0 lik intensiteten fra *en* slik tynn spalte fant vi videre at $\hat{I} = I_0 \cdot N^2$ = maksimal intensitet, rett framover, ved $\theta = 0$. En dobling av spaltebredden må gi dobbelt så mange slike ideelle "Huygens-kilder", og dermed 4 ganger så stor $\hat{I}$. Men ettersom bredden på intensitetsfordelingen samtidig blir halvert, blir total energi som treffer skjermen bare 2 ganger større. Og det passer jo bra, ettersom dobling av spaltebredden må resultere i at vi slipper dobbelt så mye energi gjennom.

Oppgave 5

Avstanden fra S_1 til en posisjon x på x-aksen er x, mens avstanden fra S_2 til samme posisjon er $\sqrt{x^2+d^2}$. Totalt elektrisk felt i x blir dermed

$$E(x,t) = E_0\frac{d}{\sqrt{x^2+d^2}}\cos(k\sqrt{x^2+d^2}-\omega t) + E_0\frac{d}{x}\cos(kx-\omega t)$$

Eneste grunn til faktoren d i telleren er at det kanskje er greit at dimensjonen til amplituden E_0 tilsvarer et elektrisk felt. Men bortsett fra det er de felles faktorene E_0 og d helt uinteressante her, i det vi kun er ute etter hvordan E avhenger av x.
Intensiteten $I(x)$ finner vi ved å kvadrere $E(x,t)$ for deretter å midle over en periode $T = 2\pi/\omega$. Vi får

$$I(x) \sim \langle E(x,t)^2\rangle \sim \langle \frac{1}{L^2}\cos^2(kL-\omega t) + \frac{1}{x^2}\cos^2(kx-\omega t) + \frac{2}{xL}\cos(kL-\omega t)\cos(kx-\omega t)\rangle$$

der $L = \sqrt{x^2+d^2}$. Midling over en periode gir en faktor 1/2 i de to første leddene. Det siste leddet må vi se litt nærmere på. Vi bruker at

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b$$

og får

$$
\begin{aligned}
\cos(kx-\omega t)\cos(kL-\omega t) &= (\cos kx\cos\omega t+\sin kx\sin\omega t)\cdot(\cos kL\cos\omega t+\sin kL\sin\omega t) \\
&= \cos kx\cos kL\cos^2\omega t+\sin kx\sin kL\sin^2\omega t+ \\
&\quad (\cos kx\sin kL+\sin kx\cos kL)\cos\omega t\sin\omega t
\end{aligned}
$$

Midling over en periode gir en faktor 1/2 i de to første leddene, mens det siste leddet forsvinner siden

$$\langle\cos\omega t\sin\omega t\rangle = 0$$

Videre er

$$\cos kx\cos kL+\sin kx\sin kL = \cos(kL-kx)$$

slik at vi alt i alt får

$$I(x) \sim \frac{1}{2L^2}+\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{2xL}\cos(kL-kx) \sim \frac{1}{L^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{xL}\cos(kL-kx)$$

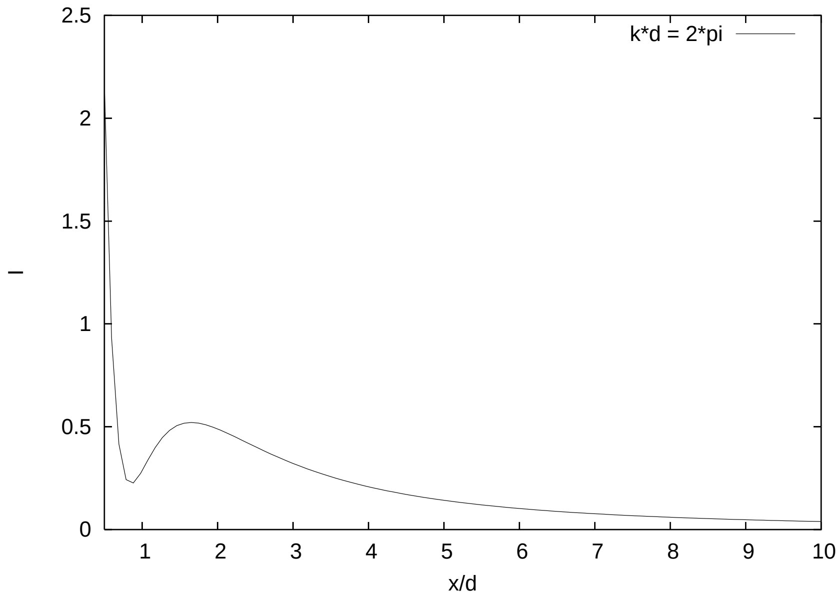
Her kan det være greit å innføre en dimensjonsløs størrelse

$$\alpha = x/d$$

som gjør at vi kan skrive

$$I(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2+1}+\frac{2\cos[kd(\sqrt{\alpha^2+1}-\alpha)]}{\alpha\sqrt{\alpha^2+1}}$$

I figuren nedenfor er denne funksjonen plottet, med valget $kd = 2\pi$, dvs at $d = \lambda$:



I neste figur er funksjonen plottet, med valget $kd = 20\pi$, dvs at $d = 10\lambda$: