Institutt for fysikk, NTNU
TFY4160/FY1002 Bølgefysikk
Høst 2006

Løsningsforslag til øving 2

Veiledning 31. august

a) Kirchhoffs spenningsregel sier at summen av alle potensialendringer rundt en lukket krets skal være lik null. Det er ikke annet enn kravet om energibevarelse, eller mer presist, at en elektrisk ladning skal ha en entydig potensiell energi i en hvilken som helst posisjon i kretsen. Vi har oppgitt at spenningsfallet over motstanden er RI, over kondensatoren Q/C og over induktansen $L\dot{I}$. Dermed:

$$V_0 \cos \omega t - L\dot{I} = RI + \frac{Q}{C},$$

og ettersom $I = \dot{Q}$ har vi

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = V_0 \cos \omega t.$$

(Minustegn foran $L\dot{I}$ fordi det induseres en *motspenning* i induktansen, dvs den prøver å motvirke endringer i strømstyrken I.)
Ved direkte sammenligning mellom ligningene for x og Q ser vi at

- resistansen R er analog til dempingskonstanten b
- invers kapasitans $1/C$ er analog til fjærkonstanten k
- spenningsamplituden V_0 er analog til kraftamplituden F_0
- ladningen Q er analog til utsvinget x
- strømmen I er analog til hastigheten $\dot{x}$

Disse analogiene mellom mekaniske og elektriske svingesystemer kan utnyttes i praksis. For det første kan man modellere et potensielt stort og utilgjengelig mekanisk system med en liten og grei elektrisk krets på laben. For det andre kan elektriske kretser oversettes til mekaniske svingesystemer, noe som kan gi en lettere intuitiv forståelse for hvordan systemet vil oppføre seg.

b) I forelesningene fant vi at relativt energitap pr periode for underdempede svingninger er

$$\frac{\Delta E}{E} = 1 - e^{-4\pi\delta/\omega}$$

der $\delta = b/2m$, $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ og $\omega_0^2 = k/m$. Vi setter dette uttrykket lik maksimalt energitap pr periode α og får

$$1 - e^{-2\pi b_{\max}/m\sqrt{k/m - b_{\max}^2/4m^2}} = \alpha.$$

Denne ligningen må løses mhp $b_{\max}$, noe som bare er snakk om litt algebra: Samle $1-\alpha$ på en side, ta ln på begge sider og kvadrer begge sider:

$$\frac{4\pi^2 b_{\max}^2}{km - b_{\max}^2/4} = [\ln(1-\alpha)]^2$$

Dermed:

$$b_{\max}^2 \left(4\pi^2 + [\ln(1-\alpha)]^2/4\right) = km\,[\ln(1-\alpha)]^2$$

og

$$b_{\max}^2 = \frac{4km\,[\ln(1-\alpha)]^2}{16\pi^2 + [\ln(1-\alpha)]^2}$$

Divisjon med $[\ln(1-\alpha)]^2$ over og under brøkstreken gir endelig

$$b_{\max} = \frac{\sqrt{4km}}{\sqrt{1 + [4\pi/\ln(1-\alpha)]^2}}$$

som skulle vises.
Dersom dempingen skal være veldig svak, dvs $\alpha \ll 1$, kan vi bestemme $b_{\max}$ direkte ved å sette

$$\frac{\Delta E}{E} \simeq \frac{4\pi\delta}{\omega_0} = \frac{2\pi b}{m\omega_0} = \frac{2\pi b}{\sqrt{km}}$$

Dermed blir

$$b_{\max} = \alpha\,\frac{\sqrt{km}}{2\pi}$$

Alternativt kan en ta utgangspunkt i det eksakte uttrykket for $b_{\max}$, tilnærme logaritmeleddet med $\ln(1-\alpha) \simeq -\alpha$ og få nøyaktig samme svar for $b_{\max}$.

c) Utregning av $G(\omega)$ og ϕ_0:
Med $Q(t) = Q_0 \sin(\omega t + \phi_0)$ har vi

$$\dot{Q} = \omega Q_0 \cos(\omega t + \phi_0)$$

og

$$\ddot{Q} = -\omega^2 Q_0 \sin(\omega t + \phi_0)$$

som innsatt i ligningen for Q gir

$$-L\omega^2 Q_0 \sin(\omega t + \phi_0) + R\omega Q_0 \cos(\omega t + \phi_0) + \frac{1}{C} Q_0 \sin(\omega t + \phi_0) = V_0 \cos\omega t$$

For å komme videre her, må vi bruke at $\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$ og $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$. Da har vi

$$\begin{aligned}-L\omega^2 Q_0 \sin\phi_0 \cos\omega t - L\omega^2 Q_0 \cos\phi_0 \sin\omega t &+ R\omega Q_0 \cos\phi_0 \cos\omega t - R\omega Q_0 \sin\phi_0 \sin\omega t + \\ \frac{1}{C} Q_0 \sin\phi_0 \cos\omega t + \frac{1}{C} Q_0 \cos\phi_0 \sin\omega t &- V_0 \cos\omega t = 0\end{aligned}$$

Dersom denne ligningen skal være oppfylt til alle tider, dvs for vilkårlig verdi av t, må leddene som inneholder $\sin\omega t$ og de som inneholder $\cos\omega t$ summere seg til null hver for seg. Følgelig:

$$\begin{aligned} -L\omega^2 Q_0\cos\phi_0 - R\omega Q_0\sin\phi_0 + \frac{1}{C}Q_0\cos\phi_0 &= 0 \\ -L\omega^2 Q_0\sin\phi_0 + R\omega Q_0\cos\phi_0 + \frac{1}{C}Q_0\sin\phi_0 - V_0 &= 0 \end{aligned}$$

Ettersom Q_0 ikke er lik null, gir den første av disse ligningene

$$\begin{aligned} R\sin\phi_0 &= \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)\cos\phi_0 \\ R^2\left(1-\cos^2\phi_0\right) &= \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2\cos^2\phi_0 \\ R^2 &= \left[R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2\right]\cos^2\phi_0 \\ \cos\phi_0 &= \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{R}{G} \end{aligned}$$

mens fra den andre har vi

$$Q_0 = \frac{V_0/\omega}{R\cos\phi_0 + (1/\omega C - \omega L)\sin\phi_0}$$

Da er vi nesten i mål ettersom vi kjenner $\cos\phi_0$, og dermed $\sin\phi_0$. Vi setter inn $\cos\phi_0 = R/G$, $\sin\phi_0 = \sqrt{1 - R^2/G^2}$ og $1/\omega C - \omega L = \sqrt{G^2 - R^2}$:

$$Q_0 = \frac{V_0/\omega}{R^2/G + \sqrt{G^2 - R^2}\sqrt{1 - R^2/G^2}} = \frac{V_0}{\omega G}$$

Den som fortsatt henger med i svingene, lurer kanskje på om alle fortegn ble riktige i de ulike overgangene ovenfor, siden vi har kvadrert og tatt kvadratrot både her og der. Og en smule skepsis er faktisk på sin plass, i hvert fall når det gjelder fasevinkelen ϕ_0. Resultatet $\cos\phi_0 = R/G$ betyr at ϕ_0 må ligge i 1. eller 4. kvadrant, dvs i intervallet $(-\pi/2, \pi/2)$, ettersom både R og G er positive størrelser. Men vi har mistet fortegnet på ϕ_0 underveis, siden $\cos\phi_0 = \cos(-\phi_0)$! Det hadde vært bedre å uttrykke fasevinkelen ved hjelp av tangens-funksjonen. Fra ligningen

$$R\sin\phi_0 = \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)\cos\phi_0$$

har vi

$$\tan\phi_0 \left(= \frac{\sin\phi_0}{\cos\phi_0}\right) = \frac{1/\omega C - \omega L}{R}$$

og vi ser at ϕ_0 kan bli positiv eller negativ, avhengig av om telleren er positiv eller negativ.
Du ser at selv for et enkelt system som dette, ender vi opp med tildels grisete regning, og en kan jo spørre seg om det ikke er en enklere vei til målet. Svaret på det er ja, under forutsetning av at man er villig til å ta i bruk komplekse størrelser. Bakerst i løsningsforslaget har jeg tatt

med litt om dette.

Vi har størst mulig ladningsamplitude Q_0 når nevneren $\omega G(\omega)$ er minst mulig. Ettersom både ω og $G(\omega)$ er positive størrelser, kan vi like gjerne finne den frekvensen som gjør $\omega^2 G^2(\omega)$ minimal, noe som er hensiktsmessig her. Vi regner ut:

$$\omega^2 G^2(\omega) = \omega^2 \left(R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2\right) = L^2\omega^4 + \left(R^2 - 2L/C\right)\omega^2 + 1/C^2$$

Denne funksjonen kan vi nå derivere mhp ω og sette lik null for å finne minimum. Eller vi kan innføre $z = \omega^2$ og derivere mhp z:

$$\frac{d}{dz}\left(L^2 z^2 + \left(R^2 - 2L/C\right) z + 1/C^2\right) = 2L^2 z + R^2 - 2L/C = 0$$

som gir

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

Med oppgitte tallverdier:

$$\omega_1 = \sqrt{10^{12} - \frac{1}{2} \cdot 10^{12}} \simeq 0.7 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

Strømmen er

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \omega Q_0 \cos(\omega t + \phi_0)$$

som betyr at strømamplituden er

$$I_0 = \omega Q_0 = \frac{V_0}{G(\omega)}$$

Følgelig har vi maksimal I_0 for minimal $G(\omega)$, noe som åpenbart inntreffer når

$$\omega L - 1/\omega C = 0$$

dvs

$$\omega_2 = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Med oppgitte tallverdier:

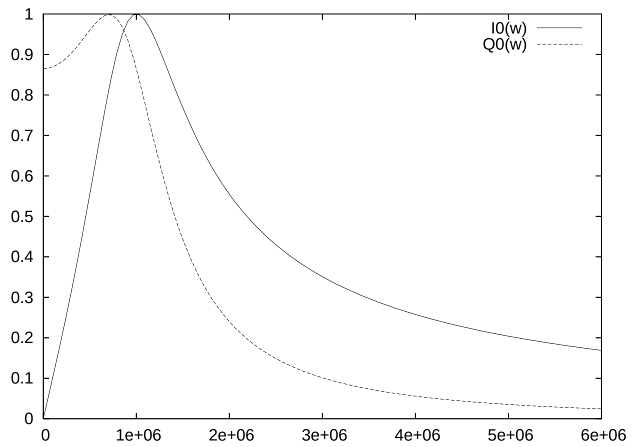
$$\omega_2 = 10^6 \text{ Hz}$$

Tilhørende fasekonstanter:

$$\phi_{01} = \arccos \frac{R}{G(\omega_1)} = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 35^\circ$$

$$\phi_{02} = \arccos \frac{R}{G(\omega_2)} = \arccos 1 = 0$$

Det kan kanskje være en ide å tegne opp amplitudene Q_0 og I_0 som funksjon av vinkelfrekvensen til spenningskilden, med gjeldende verdier for R, L og C:



Vi ser at det her er snakk om forholdsvis brede resonanskurver. Godhetsfaktoren er

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = 1$$

der vi har brukt det vi fant for det mekaniske svingesystemet, $Q = m\omega_0/b$, samt analogiene $m \leftrightarrow L$ og $b \leftrightarrow R$. En Q-verdi på 1 innebærer at bredden på resonanskurven er av samme størrelsesorden som resonansfrekvensen selv.

Kommentarer:
1. Litt om generalisert motstand, eller *impedans*. (Ikke pensum i bølgefysikk, men for BFY og LUR: Se FY1013 Elmag II.)

Hvis vi har en likestrømkrets, dvs med en konstant spenningskilde V_0, og finner at spenningskilden leverer en strøm I_0 til kretsen, kan vi bestemme kretsens (totale) elektriske motstand fra Ohms lov:

$$R = \frac{V_0}{I_0}$$

Hvis vi har en vekselstrømkrets, med en spenningskilde $V_0 \cos \omega t$, og finner at spenningskilden leverer en strøm $I_0 \cos(\omega t + \phi_0)$ til kretsen, defineres kretsens generaliserte motstand, eller *impedans* Z på tilsvarende vis:

$$Z = \frac{V_0}{I_0}$$

For RCL-kretsen i denne øvingen finner vi at

$$Z = G(\omega) = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

Med andre ord, impedansen Z avhenger av (vinkel-)frekvensen ω til den påtrykte spenningen. Impedansen er minimal dersom $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, kretsens resonansfrekvens. Da er strømstyrken maksimal, og strømmen $I(t)$ svinger i fase med den påtrykte spenningen. (Vi fant jo $\phi_{02} = 0$ ovenfor.)

Det er ingenting i veien for å benytte impedansbegrepet også i det mekaniske systemet, og mekanisk impedans defineres på tilsvarende vis, som forholdet mellom påtrykt kraft og resulterende hastighet:

$$Z = \frac{F_0}{v_0}$$

Benytter vi analogien mellom størrelsene i det mekaniske og det elektriske svingesystemet, kan vi uten videre skrive ned uttrykket for den mekaniske impedansen til systemet i oppgavens figur A:

$$Z = \sqrt{b^2 + (\omega m - k/\omega)^2}$$

2. Tvungen svingning: løsning ved hjelp av kompleks regning.

Et åpenbart irritasjonsmoment i løsningen av oppgave c ovenfor var det faktum at vi fikk inn både sinuser og cosinuser, og derfor måtte styre en del med trigonometriske relasjoner. Og vi innser fort at dette er uunngåelig dersom vi starter med å skrive løsningen for Q (eventuelt x) som en cosinus eller en sinus: Derivasjon *en* gang gjør sinus om til cosinus, og omvendt, og hvis vi har demping, har vi jo nettopp et ledd som er proporsjonalt med den deriverte av Q (eventuelt x).
Løsningen på dette problemet har vi vært innom allerede, i og med at vi utledet løsningen av fri, dempede svingninger ved å starte med en *eksponentialfunksjon*. La oss forsøke det samme her: Vi setter

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t}$$

i det vi husker på at den fysiske påtrykte spenningen egentlig er

$$V_0 \cos \omega t = \mathrm{Re}\left(V_0 e^{i\omega t}\right)$$

Vi *kompliserer* altså problemet ved å innføre en kompleks representasjon av den reelle størrelsen $V(t)$, men samtidig *forenkler* vi problemet rent regneteknisk, i og med at eksponentialfunksjonen har seg selv som løsning, uansett hvor mange ganger vi deriverer den (eller integrerer den, for den saks skyld).
Det er vel nå temmelig opplagt at en partikulærløsning av differensialligningen for Q må være på formen

$$Q(t) = Q_0 e^{i\omega t}$$

(og vi glemmer ikke at den fysiske ladningen får vi ved å ta realdelen av dette.) Innsetting gir

$$\left(-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C}\right) Q_0 e^{i\omega t} = V_0 e^{i\omega t}$$

siden vi får ned en faktor $i\omega$ for hver gang vi deriverer $Q(t)$ mhp t. Dermed får vi

$$Q_0 = \frac{V_0}{-\omega^2 L + i\omega R + 1/C} = \frac{V_0}{i\omega\left(R + i\omega L + 1/i\omega C\right)}$$

Strømmen blir

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = Q_0 i\omega e^{i\omega t} = \frac{V_0}{R + i\omega L + 1/i\omega C} e^{i\omega t}$$

dvs med amplitude

$$I_0 = \frac{V_0}{R + i\omega L + 1/i\omega C}$$

Dette komplekse tallet kan skrives som

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} e^{-i\beta}$$

der

$$\tan\beta = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

(Vi ser at $\beta = -\phi_0$.) Den *fysiske*, reelle strømstyrken blir realdelen av den beregnede komplekse $I(t)$:

$$I_{\text{fysisk}}(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \cos(\omega t - \beta)$$

Impedansen Z kan nå oppfattes som en kompleks størrelse,

$$Z \equiv \frac{V}{I} = \frac{V_0}{I_0} = \frac{V_0}{|I_0|} e^{i\beta}$$

med absoluttverdi $|Z| = V_0/|I_0|$ og fasevinkel β.
Tilbake til ladningen på kondensatoren: Det komplekse uttrykket for amplituden Q_0 kan skrives slik:

$$Q_0 = \frac{V_0}{\omega\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} e^{-i\pi/2 - i\beta}$$

Den fysiske ladningen er realdelen av $Q(t)$:

$$Q_{\text{fysisk}}(t) = \frac{V_0}{\omega\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \cos(\omega t - \pi/2 - \beta)$$

som er det samme som vi fant med reell regning, siden

$$\cos(\omega t - \pi/2 - \beta) = \sin(\omega t - \beta) = \sin(\omega t + \phi_0)$$

Illustrasjon av impedansen i det komplekse planet: