Institutt for fysikk, NTNU
TFY4160/FY1002 Bølgefysikk
Høst 2006

Løsningsforslag til øving 5

Veiledning 21. september

Oppgave 1

a) Longitudinale utsving på ei slik fjær oppfyller bølgeligningen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\mu}{K}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

og det eneste vi krever av funksjonen $\xi(x,t)$ er at den kan skrives på formen $f(x - vt)$ eller $g(x + vt)$, eller en kombinasjon av disse to, der f og g er vilkårlige to ganger deriverbare funksjoner. Den oppgitte gaussformede bølgepulsen er på en slik form ($f(x - vt)$) og representerer dermed en mulig bølgepuls langs fjæra. Bølgen propagerer i positiv x-retning.

b) Som utledet i forelesningene, og som vi ser av ligningen ovenfor, har vi

$$v = \sqrt{\frac{K}{\mu}}$$

Uttrykket på høyre side har dimensjon

$$\sqrt{\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s}^2}{\mathrm{kg/m}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = \mathrm{m/s}$$

som er det vi skal ha.

c) Bølgepulsens energi endrer seg ikke med tiden. Vi kan derfor beregne E for et hvilket som helst tidspunkt, for eksempel $t = 0$. Med energi $\varepsilon(x,0)\,dx$ på intervallet $(x, x + dx)$, må total energi være

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x,0)\,dx$$

Her inngår størrelsen $d\xi/dX = d\xi/dx$, og med $t = 0$ har vi

$$\frac{d\xi}{dx} = \xi_0(-2x/a^2)e^{-x^2/a^2}$$

som gir

$$\varepsilon(x,0) = \frac{2\mu v^2 \xi_0^2}{a^2}\frac{2x^2}{a^2}e^{-2x^2/a^2}$$

Vi substituerer $\beta = \sqrt{2}x/a$ som gir (med $dx = a\,d\beta/\sqrt{2}$)

$$E = \frac{2\mu v^2 \xi_0^2}{\sqrt{2}a} \int_{-\infty}^{\infty} \beta^2 e^{-\beta^2} = \frac{2\mu v^2 \xi_0^2}{\sqrt{2}a} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}\mu v^2 \xi_0^2}{\sqrt{2}a}$$

som skulle vises.

Oppgave 2

a) Innsetting av den antatte løsningen gir

$$\begin{aligned}
\xi(x+d) - \xi(x) &= \xi_0 \left[\sin(kx + kd - \omega t) - \sin(kx - \omega t)\right] \\
&= \xi_0 \cdot 2\cos\frac{kx + kd - \omega t + kx - \omega t}{2} \sin\frac{kx + kd - \omega t - kx + \omega t}{2} \\
&= 2\xi_0 \cos(kx - \omega t + \frac{kd}{2}) \sin\frac{kd}{2} \\
\xi(x-d) - \xi(x) &= \xi_0 \left[\sin(kx - kd - \omega t) - \sin(kx - \omega t)\right] \\
&= \xi_0 \cdot 2\cos\frac{kx - kd - \omega t + kx - \omega t}{2} \sin\frac{kx - kd - \omega t - kx + \omega t}{2} \\
&= -2\xi_0 \cos(kx - \omega t - \frac{kd}{2}) \sin\frac{kd}{2}
\end{aligned}$$

b) I neste omgang bestemmer vi høyre side i bevegelsesligningen oppgitt i oppgaveteksten ved å legge de to uttrykkene i punkt a sammen. Vi benytter oss av de trigonometriske relasjonene

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

og får

$$\begin{aligned}
\xi(x+d) + \xi(x-d) - 2\xi(x) &= 2\xi_0 \sin\frac{kd}{2}\left[\cos(kx - \omega t + \frac{kd}{2}) - \cos(kx - \omega t - \frac{kd}{2})\right] \\
&= 2\xi_0 \sin\frac{kd}{2} [\cos(kx - \omega t)\cos\frac{kd}{2} - \sin(kx - \omega t)\sin\frac{kd}{2} \\
&= -\cos(kx - \omega t)\cos\frac{kd}{2} - \sin(kx - \omega t)\sin\frac{kd}{2}] \\
&= -4\xi_0 \sin^2\frac{kd}{2}\sin(kx - \omega t)
\end{aligned}$$

Her har vi også brukt at $\sin a = -\sin(-a)$ og $\cos a = \cos(-a)$. På venstre side av bevegelsesligningen inngår den andrederiverte av ξ med hensyn på t:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

Vi setter alt sammen inn i bevegelsesligningen, forkorter felles faktor ξ_0 og $\sin(kx - \omega t)$ på begge sider, og får

$$-m\omega^2 = -4s\sin^2\frac{kd}{2}$$

dvs

$$\omega^2 = \frac{4s}{m}\sin^2\frac{kd}{2}$$

som vi skulle vise.

c) Når $kd \ll 1$, kan vi sette

$$\sin^2\frac{kd}{2} \simeq \frac{k^2d^2}{4}$$

slik at

$$\omega^2 \simeq \frac{4s}{m}\cdot\frac{k^2d^2}{4} = \frac{sk^2d^2}{m}$$

som gir

$$v = \frac{\omega}{k} \simeq \sqrt{\frac{sd^2}{m}}$$

dvs uavhengig av bølgelengden (og bølgetallet).
d) Lydens hastighet i metaller har vi sett eksempler på i forelesningene. La oss si at bølgehastigheten er omtrent 1000 m/s. Det hørbare området dekker frekvenser mellom ca 20 og 20000 Hz, som dermed tilsvarer bølgelengder

$$\lambda = \frac{v}{\nu}$$

i området mellom 5 cm og 50 m. Dette er uansett veldig mye mer enn typiske avstander mellom naboatomer i en krystall (mindre enn 1 nm), så for hørbar lyd er tilnærmelsen $kd \ll 1$, eventuelt $\lambda \gg d$ godt oppfylt.

Oppgave 3

a) Svar C er korrekt. Fasehastigheten er gitt ved

$$v = \frac{\omega}{k}$$

og vi ser fra figuren at dette forholdet er størst for små verdier av k, dvs for lange bølgelengder.

b) Svar B er korrekt. Bølgehastigheten er gitt ved

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

slik at en endring i S til $S + \Delta S$ gir hastigheten

$$\begin{aligned} v' &= \sqrt{\frac{S + \Delta S}{\mu}} = \sqrt{\frac{S(1 + \Delta S/S)}{\mu}} \\ &= \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot \sqrt{1 + \Delta S/S} \simeq \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot (1 + \Delta S/2S) = v \cdot (1 + \Delta S/2S) \end{aligned}$$

Følgelig er

$$\Delta v = v' - v = v\Delta S/2S$$

c) Svar A er korrekt. Bølgehastigheten er gitt ved

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

slik at en endring i μ til $\mu + \Delta\mu$ gir hastigheten

$$\begin{aligned} v' &= \sqrt{\frac{S}{\mu + \Delta\mu}} = \sqrt{\frac{S}{\mu(1 + \Delta\mu/\mu)}} \\ &= \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta\mu/\mu}} \simeq \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot (1 - \Delta\mu/2\mu) = v \cdot (1 - \Delta\mu/2\mu) \end{aligned}$$

Følgelig er

$$\Delta v = v' - v = -v\Delta\mu/2\mu$$