Institutt for fysikk, NTNU
TFY4160/FY1002: Bølgefysikk
Høst 2006

Øving 5

Veiledning: Torsdag 21. september
Innleveringsfrist: Mandag 25. september

Oppgave 1

En gaussformet bølgepuls

$$\xi(x,t) = \xi_0 \exp\left[-\frac{(x-vt)^2}{a^2}\right]$$

vandrer med hastighet v langs ei fjær med massetetthet μ [kg/m] og elastisk modul K [N]. Størrelsen $\xi(x,t)$ representerer det longitudinale utsvinget (i forhold til likevekt) ved tidspunkt t for den biten av fjæra som har likevektsposisjon x.

a) Hvordan kan vi være sikre på at $\xi(x,t)$ virkelig *er* en mulig bølgepuls langs ei slik fjær? I hvilken retning propagerer bølgen?

b) Hvordan avhenger bølgehastigheten v av fjæras elastiske egenskaper (dvs K) og treghets-egenskaper (dvs μ)? Kontroller at uttrykket for v har riktig dimensjon.

c) Finn et uttrykk for (den totale) energien E assosiert med bølgepulsen. Kontroller at uttrykket for E har riktig dimensjon.
Tips: Ta utgangspunkt i at bølgens energi pr lengdeenhet er

$$\varepsilon(x,t) = \mu v^2 \left(\frac{d\xi}{dX}\right)^2$$

som utledet i forelesningene, med $X \equiv x - vt$. Dermed er $\varepsilon(x,t)\,dx$ bølgens energiinnhold mellom x og $x + dx$. Det oppgis her følgende integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta^2 e^{-\beta^2} d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Svar:
1c: $E = \sqrt{\pi}\mu v^2 \xi_0^2/\sqrt{2}a$

Oppgave 2

Som nevnt i forelesningene, er det mulig å finne en eksakt løsning for longitudinale bølger på masse-fjær-transmisjonslinjen, uten å anta at bølgelengden λ er mye større enn avstanden d mellom to nabomasser. Ved å betrakte kreftene som virker på massen m med likevektsposisjon x, endte vi opp med følgende bevegelsesligning:

$$m\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = s\left[\xi(x+d) + \xi(x-d) - 2\xi(x)\right]$$

Her er $\xi(x \pm d)$ utsvinget til massen med likevektsposisjon $x \pm d$, mens s er fjærkonstanten (bruker her s siden vi trenger k for å angi bølgetallet).
La oss starte med å anta at en harmonisk bølge på formen

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

er løsning av bevegelsesligningen over.

a) Bestem $\xi(x+d) - \xi(x)$ og $\xi(x-d) - \xi(x)$ ved å benytte relasjonen

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

b) Vis deretter at bevegelsesligningen ovenfor resulterer i følgende sammenheng mellom vinkelfrekvensen ω og bølgetallet k:

$$\omega^2 = \frac{4s}{m}\sin^2\left(\frac{kd}{2}\right)$$

c) I forelesningene viste vi at for lange bølgelengder ($\lambda \gg d$, eventuelt $kd \ll 1$) blir bølgehastigheten konstant (dvs uavhengig av bølgelengden) og lik

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{sd^2}{m}}$$

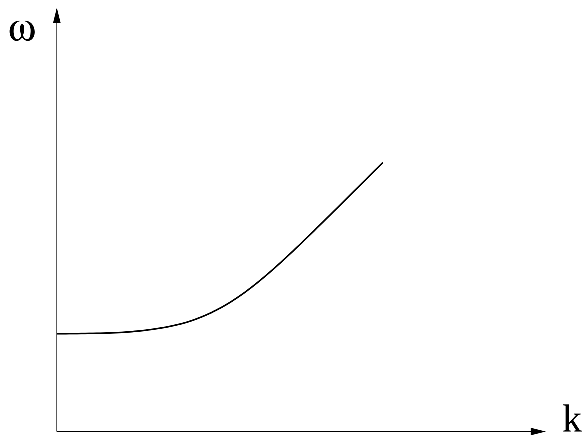
Vis at den eksakte sammenhengen mellom ω og k (den såkalte *dispersjonsrelasjonen*) fra punkt b gir samme resultat for v i grensen $kd \ll 1$.

d) Et slik enkelt masse-fjær-system som vi har sett på her, er en ganske brukbar modell for forplantning av longitudinale bølger i krystallinske materialer. Du vil lære mer om dette i emner som Faste stoffers fysikk senere i studiet.
Bruk resultatene ovenfor til å vise at longitudinale bølger tilsvarende hørbar lyd vil forplante seg med konstant (dvs frekvensuavhengig) hastighet v gjennom et metall.
Tips: Anslå bølgelengden for hørbar lyd og sammenlign med en typisk avstand mellom naboatomer i en metallkrystall.

Oppgave 3

a) Figuren viser sammenhengen mellom vinkelfrekvensen ω og bølgetallet k for en bestemt type bølger. Hvilket utsagn er da korrekt?

A Fasehastigheten er her den samme uansett bølgelengde.
B Fasehastigheten er her størst for korte bølgelengder.
C Fasehastigheten er her størst for lange bølgelengder.
D Fasehastigheten øker alltid med økende frekvens.



b) Transversale bølger på en streng med strekk-kraft S forplanter seg med bølgehastighet v. En *liten* endring ΔS i strekk-kraften fører da til en endring i bølgehastigheten lik

A $\Delta v = -v\,\Delta S/2S$
B $\Delta v = v\,\Delta S/2S$
C $\Delta v = v\,\Delta S/S$
D $\Delta v = -v\,\Delta S/S$

c) Transversale bølger på en streng med massetetthet μ forplanter seg med bølgehastighet v. En *liten* endring $\Delta\mu$ i massetettheten fører da til en endring i bølgehastigheten lik

A $\Delta v = -v\,\Delta\mu/2\mu$
B $\Delta v = v\,\Delta\mu/2\mu$
C $\Delta v = v\,\Delta\mu/\mu$
D $\Delta v = -v\,\Delta\mu/\mu$