Institutt for fysikk, NTNU
TFY4160/FY1002: Bølgefysikk
Høst 2006

Øving 9

Veiledning: Torsdag 26. oktober
Innleveringsfrist: Mandag 30. oktober

Oppgave 1

a) Planet $z = 0$ danner grenseflaten mellom to lineære medier 1 ($z < 0$) og 2 ($z > 0$), med permittiviteter og permeabiliteter henholdsvis ε_1, μ_1 og ε_2, μ_2. Anta at en plan harmonisk elektromagnetisk bølge kommer inn "fra venstre", dvs den forplanter seg i positiv z-retning. Amplituden til elektrisk felt i innkommende bølge er E_{i0}. Vis at bølgen som reflekteres i $z = 0$ har amplitude

$$E_{r0} = \frac{1-\beta}{1+\beta}\, E_{i0}$$

og at bølgen som transmitteres i $z = 0$ har amplitude

$$E_{t0} = \frac{2}{1+\beta}\, E_{i0}$$

Her er

$$\beta \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2}$$

med $v_j = c/n_j$ = bølgens (fase-)hastighet i medium j. n_j er brytningsindeksen i medium j. (Dette tilsvarer figuren på neste side, med alle vinkler lik null.)

b) Innkommende bølge har intensitet I_i. Denne fordeler seg på den reflekterte (I_r) og den transmitterte (I_t) bølgen. Finn refleksjonskoeffisienten

$$R \equiv \frac{I_r}{I_i}$$

og transmisjonskoeffisienten

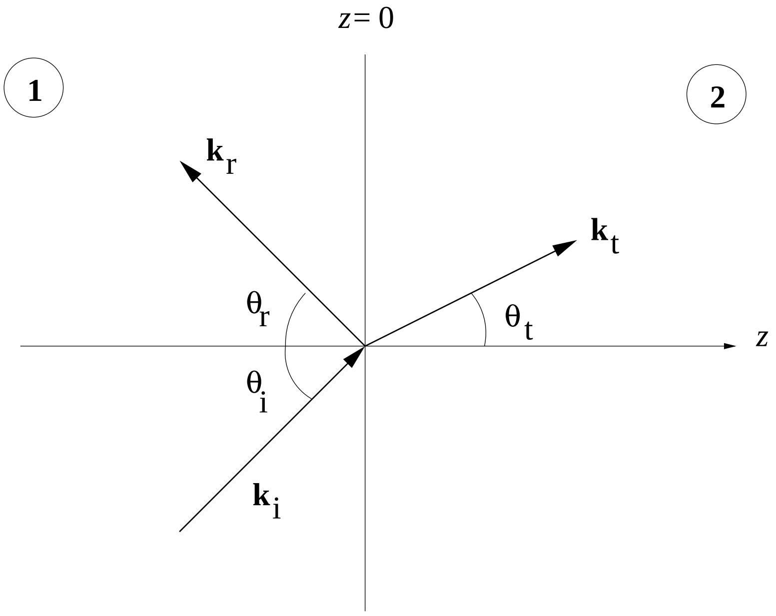
$$T \equiv \frac{I_t}{I_i}$$

uttrykt ved brytningsindeksene n_1 og n_2 i det vi antar at begge medier er "umagnetiske", dvs $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$. Bestem tallverdier for R og T for grenseflaten mellom luft ($\simeq$ vakuum) og glass med relativ permittivitet 2.25.

Oppgave 2

Geometrisk optikks tre lover

Planet $z = 0$ danner grenseflaten mellom to lineære medier 1 ($z < 0$) og 2 ($z > 0$), med brytningsindekser henholdsvis n_1 og n_2. Anta at en plan harmonisk elektromagnetisk bølge kommer inn "fra venstre" slik at forplantningsretningen, gitt ved bølgetallsvektoren $\boldsymbol{k}_i$, danner en vinkel θ_i med z-aksen. Innkommende bølge blir delvis reflektert, med bølgetallsvektor $\boldsymbol{k}_r$, og delvis transmittert (evt *refraktert*), med bølgetallsvektor $\boldsymbol{k}_t$, som vist i figuren.



Elektrisk feltvektor for de tre bølgene er

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_i &= \boldsymbol{E}_{i0} \cos(\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) \\
\boldsymbol{E}_r &= \boldsymbol{E}_{r0} \cos(\boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) \\
\boldsymbol{E}_t &= \boldsymbol{E}_{t0} \cos(\boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)
\end{aligned}$$

Bølgetallsvektoren $\boldsymbol{k}_i$ kan uttrykkes i kartesiske koordinater,

$$\boldsymbol{k}_i = k_{ix}\hat{x} + k_{iy}\hat{y} + k_{iz}\hat{z}$$

og tilsvarende for $\boldsymbol{k}_r$ og $\boldsymbol{k}_t$.

a) Bruk av grensebetingelsene for $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ i planet $z = 0$ (betingelser som skal gjelde overalt i dette planet, dvs for alle x og y og til alle tider t) vil resultere i ligninger på formen

$$A \cos(\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) + B \cos(\boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) = C \cos(\boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)$$

der koeffisientene A, B og C ikke avhenger av $\boldsymbol{r}$ og t. (Disse skal ikke bestemmes her.) Bruk dette til å argumentere for at

$$\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{r}$$

for alle mulige posisjoner $r = (x, y, 0)$ i grenseflaten $z = 0$.

Argumenter videre for at vi da må ha

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}$$

og

$$k_{iy} = k_{ry} = k_{ty}$$

Men da har vi 3 vektorer med 2 av komponentene identiske, hvilket må bety at de 3 vektorene alle ligger i ett og samme plan. Vi ser dessuten at dette planet står vinkelrett på grenseflaten, hvilket må bety at flatenormalen til grenseflaten også ligger i samme plan som de 3 bølgetallsvektorene.

Dette er geometrisk optikks 1. lov:

Bølgetallsvektorene til innkommende, reflektert og transmittert bølge danner et plan, det såkalte *innfallsplanet*, som også inkluderer flatenormalen til grenseflaten.

b) La oss nå velge $x-$ og y-aksene slik at $\boldsymbol{k}_i$ ligger i xz-planet. Vis at da er

$$k_i \sin\theta_i = k_r \sin\theta_r = k_t \sin\theta_t$$

og dermed

$$\theta_i = \theta_r$$

og

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$$

Dette er henholdsvis 2. lov (refleksjonsloven):

Innfallsvinkelen og refleksjonsvinkelen er like store: $\theta_i = \theta_r$.

Og 3. lov (brytningsloven, eller *Snells lov*):

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{n_1}{n_2}$$