

Løsningsforslag til øving 1

Oppgave 1

a) Vi antar at Hookes lov, $F = kx$, gjelder for fjæra. Newtons andre lov gir da

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

eller

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

med $\omega^2 = k/m$. Ligningen har løsning $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, som gitt i oppgaveteksten. Klossen svinger altså med vinkelfrekvens $\omega = \sqrt{k/m}$.

Amplituden A og fasekonstanten ϕ fastlegger vi ved å bruke de oppgitte initialbetingelsene $x(0) = x_0$ og $v(0) = \dot{x}(0) = v_0$. Vi har

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

slik at

$$x_0 = A \cos \phi$$

og

$$v_0 = -\omega A \sin \phi$$

Herfra er det flere mulige veier å gå. Vi kan for eksempel dele disse to ligningene med hverandre, som gir

$$\phi = -\arctan \frac{v_0}{x_0 \omega}$$

og

$$A = \frac{x_0}{\cos \arctan v_0/x_0 \omega}$$

Alternativt kan vi kvadrere de to ligningene og legge dem sammen:

$$\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = \frac{v_0^2}{\omega^2 A^2} + \frac{x_0^2}{A^2}$$

som gir

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} = x_0 \sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2}$$

og deretter

$$\phi = \arccos \frac{x_0}{A} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2}}$$

b) Siden vi ikke har noen demping i systemet, er den totale energien E bevart. (Dvs: Vi har et *konservativt* system.) Da kan vi beregne energien ved et hvilket som helst tidspunkt, for eksempel ved maksimalt utsving, der $x = x_{\max} = A$ og $v = 0$:

$$E = E_p^{\max} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}k(x_0^2 + mv_0^2/k) = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$$

Det endelige svaret her gjenkjenner vi som summen av potensiell og kinetisk energi ved $t = 0$, $E_{p0} + E_{k0}$, hvilket jo også må tilsvare den totale energien.

c) Skriver vi løsningen på formen $x(t) = B \cos \omega t + C \sin \omega t$, har vi

$$\dot{x}(t) = -\omega B \sin \omega t + \omega C \cos \omega t$$

og dermed

$$B = x_0$$

og

$$C = v_0/\omega$$

d) Maksimalt utsving:

$$x_{\max} = A = x_0 \sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2} = x_0 \sqrt{1 + E_{k0}/E_{p0}}$$

Maksimal hastighet:

$$v_{\max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}(x_0^2 + mv_0^2/k)} = v_0 \sqrt{1 + kx_0^2/mv_0^2} = v_0 \sqrt{1 + E_{p0}/E_{k0}}$$

Med oppgitte tallverdier:

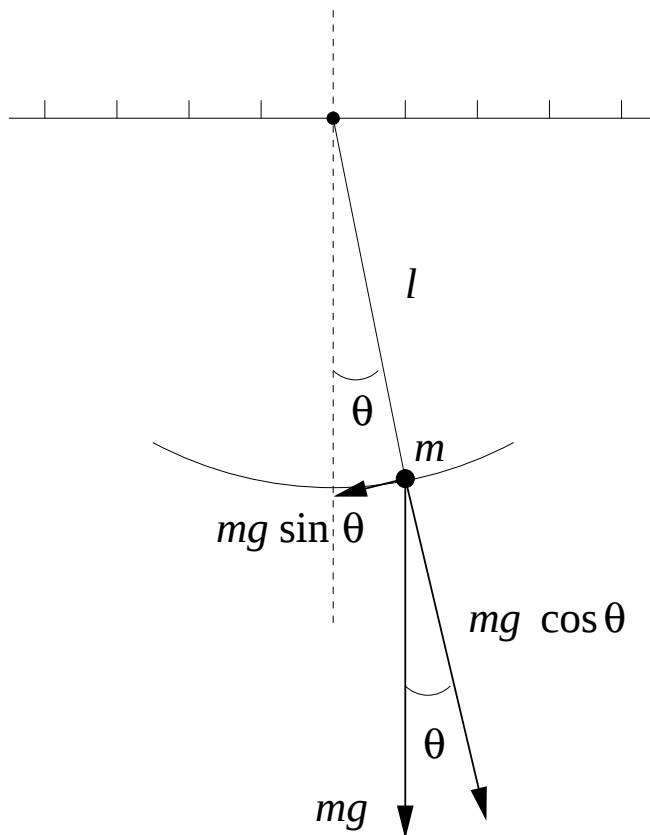
$$E_{p0} = 0.5 \cdot 100 \cdot 0.010^2 = \frac{1}{200}$$

$$E_{k0} = 0.5 \cdot 0.25 \cdot 0.20^2 = \frac{1}{200}$$

begge i enheten J, ettersom vi kun har brukt SI-enheter underveis. Følgelig er $x_{\max} = \sqrt{2}x_0 \simeq 1.4$ cm og $v_{\max} = \sqrt{2}v_0 \simeq 28$ cm/s.

Oppgave 2

a) Figuren nedenfor viser kule og snor når snora danner en vinkel θ med vertikalretningen.



Den vertikale tyngdekraften mg kan dekomponeres i en komponent i snoras lengderetning, $mg \cos \theta$, og en komponent tangentielt til svingebevegelsens (sirkulære) bane, $mg \sin \theta$. Førstnevnte komponent utlignes av snordraget (ikke tegnet inn i figuren), ettersom det ikke er noen bevegelse i snoras lengderetning. Sistnevnte komponent bestemmer bevegelsen via Newtons andre lov,

$$-mg \sin \theta = ma$$

Her har vi valgt positiv retning mot klokka, dvs positiv verdi for θ samt positiv posisjon når utsvinget er som i figuren over. Vi ser at kraften alltid vil virke i motsatt retning av utsvinget, og det er ivaretatt med minustegnet i bevegelsesligningen. For bevegelse i sirkulær bane med radius l har vi følgende sammenheng mellom lengde ds og vinkelendring $d\theta$: $ds = l d\theta$. Hastigheten er dermed

$$v = \frac{ds}{dt} = l \frac{d\theta}{dt}$$

og akselerasjonen

$$a = \frac{dv}{dt} = l \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Innsetting gir da

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

b) Siste ligning i punkt a kan løses eksakt, slik at frekvens og periode kan uttrykkes ved et såkalt elliptisk integral. Men dersom utsvinget ikke er for stort, vil θ hele tiden være liten, slik at vi tilnærmet kan skrive $\sin \theta \simeq \theta$. Bevegelsesligningen forenkler seg da til

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

som er på samme form som den vi kjenner for posisjonen $x(t)$ i "masse-fjær-systemet. Vi må dermed ha en harmonisk løsning

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$

for vinkelen θ , der vinkelfrekvensen er $\omega = \sqrt{g/l}$. Svingebevegelsens periode blir altså

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Vi ser at kulas masse m ikke har noen innvirkning på svingetiden. Dessuten har vel alle erfart at en kort pendel svinger raskere enn en lang en.

Kommentar: Den beregnede svingetiden blir en dårligere og dårligere tilnærming jo større pendelens utsving er. Den eksakte løsningen kan skrives som en (uendelig) potensrekke i vinkelamplituden θ_0 , der de første par leddene ser slik ut:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \frac{11\theta_0^4}{3072} + \dots \right)$$

Her må vi selvsagt bruke enheten radianer for vinkelen θ_0 .

Oppgave 3

a) Newtons 2. lov gir oss klossenes bevegelsesligninger. La oss f.eks. velge positiv retning for utsving fra likevekt mot høyre. I den nederste figuren har vi da $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ og $x_1 > x_2$, slik at fjæra til venstre er strukket mens den i midten og den til høyre er presset sammen. Venstre fjær er strukket en lengde x_1 og virker på masse 1 med en kraft mot venstre. Fjæra i midten er sammenpresset en lengde $x_1 - x_2$ og virker på masse 1 med en kraft mot venstre og masse 2 med en kraft mot høyre. Fjæra til høyre er sammenpresset en lengde x_2 og virker på masse 2 med en kraft mot venstre. Dermed har vi kraft på masse 1:

$$F_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) = -2kx_1 + kx_2$$

og kraft på masse 2:

$$F_2 = -kx_2 - k(x_2 - x_1) = kx_1 - 2kx_2$$

Newtons 2. lov gir da

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -2kx_1 + kx_2 \\ m\ddot{x}_2 &= kx_1 - 2kx_2 \end{aligned}$$

b) Innsetting av antatte løsninger for $x_1(t)$ og $x_2(t)$ gir ligningene

$$\begin{aligned} -m\omega^2 A &= k(-2A + B) \\ -m\omega^2 B &= k(A - 2B) \end{aligned}$$

etter at vi har strøket en felles faktor $\cos(\omega t + \phi)$ i alle ledd. Fra hver av disse ligningene kan vi finne et uttrykk for forholdet A/B :

$$\begin{aligned} A/B &= k/(2k - m\omega^2) \\ A/B &= -(2k - m\omega^2)/k \end{aligned}$$

Ettersom venstre side i disse ligningene er like store, må også høyre side være det. Dermed:

$$k/(2k - m\omega^2) = -(2k - m\omega^2)/k$$

eller

$$m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 3k^2 = 0$$

Dette er en 2.gradsligning for ω^2 , med løsninger

$$\omega^2 = \frac{4km \pm \sqrt{16k^2m^2 - 12k^2m^2}}{2m^2} = \frac{4km \pm 2km}{2m^2}$$

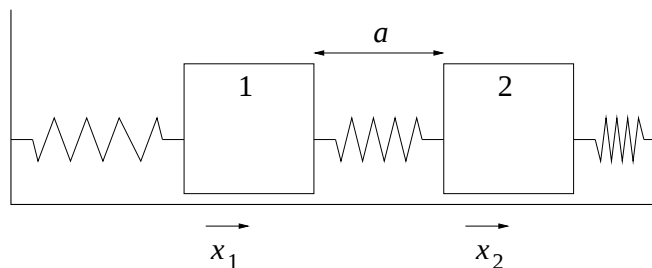
dvs k/m og $3k/m$. De mulige vinkelfrekvensene som klossene kan svinge med er følgelig $\omega_a = \sqrt{k/m}$ og $\omega_s = \sqrt{3k/m}$, som vi skulle vise.

c) Vi finner sammenhengen mellom A og B for hver av de to vinkelfrekvensene ved å sette inn i det ene eller andre uttrykket ovenfor for forholdet A/B :

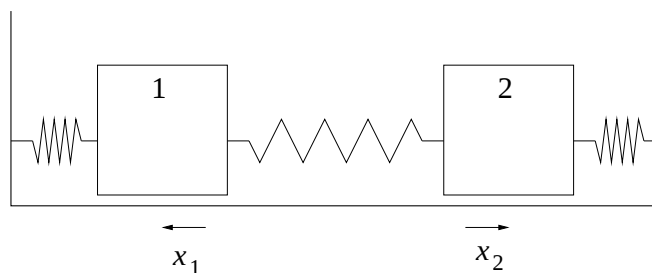
$$\begin{aligned} A_a/B_a &= k/(2k - m\omega_a^2) = 1 \\ A_s/B_s &= k/(2k - m\omega_s^2) = -1 \end{aligned}$$

Det betyr at i den "antisymmetriske moden" er $x_1 = x_2$, og de to massene svinger fram og tilbake med samme fase, uten at fjæra i midten strekkes eller presses sammen. I den "symmetriske moden" er $x_1 = -x_2$, og de to massene svinger i motfase, slik at fjæra i midten strekkes og presses sammen dobbelt så mye som fjærene til venstre og høyre.

Antisymmetrisk mode:



Symmetrisk mode:



I den antisymmetriske moden påvirkes hver av de to massene kun av krafta fra ei fjær, ettersom fjæra i midten verken strekkes eller presses sammen. Med andre ord, hver masse svinger på samme måte som om den andre ikke var til stede, og vi må ha $\omega_a^2 = k/m$.

I den symmetriske moden er fjæra til venstre strukket en lengde x_1 og fjæra i midten er sammenpresset en lengde $2x_1$ når masse 1 er i posisjon x_1 . Da blir total kraft på masse 1 lik $-3kx_1$. Med andre ord, masse 1 svinger som om den var festet til ei fjær med fjærkonstant $3k$, slik at vi må ha $\omega_s^2 = 3k/m$. (Tilsvarende argument kan gjennomføres for masse 2.)

Vi ser at dette stemmer med resultatet i punkt b).

Kommentar: For å få systemet til å svinge i en av disse to modene, kan vi ikke ha vilkårlige initialbetingelser. Vi ser f.eks. at hvis vi skyver begge massene like langt i samme retning og slipper dem, vil systemet svinge i den antisymmetriske moden. Skyves de to massene like langt i hver sin retning, vil det svinge i den symmetriske moden. Den *generelle* svingebevegelsen vil være en *superposisjon* av begge moder:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= A_a \cos(\omega_a t + \phi_a) + A_s \cos(\omega_s t + \phi_s) \\x_2(t) &= A_a \cos(\omega_a t + \phi_a) - A_s \cos(\omega_s t + \phi_s)\end{aligned}$$

Her har vi 4 ubestemte konstanter, A_a , A_s , ϕ_a og ϕ_s , som kan fastlegges hvis vi f.eks. kjenner posisjon og hastighet til hver av massene ved $t = 0$.

Løsningsforslag til øving 2

a) Kirchhoffs spenningsregel sier at summen av alle potensialendringer rundt en lukket krets skal være lik null. Det er ikke annet enn kravet om energibevarelse, eller mer presist, at en elektrisk ladning skal ha en entydig potensiell energi i en hvilken som helst posisjon i kretsen. Vi har oppgitt at spenningsfallet over motstanden er RI , over kondensatoren Q/C og over induktansen $L\dot{I}$. Dermed:

$$V_0 \cos \omega t - L\dot{I} = RI + \frac{Q}{C},$$

og ettersom $I = \dot{Q}$ har vi

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = V_0 \cos \omega t.$$

(Minustegn foran $L\dot{I}$ fordi det induseres en *motspenning* i induktansen, dvs den prøver å motvirke endringer i strømstyrken I .)

Ved direkte sammenligning mellom ligningene for x og Q ser vi at

- resistansen R er analog til dempingskonstanten b
- invers kapasitans $1/C$ er analog til fjærkonstanten k
- spenningsamplituden V_0 er analog til kraftamplituden F_0
- ladningen Q er analog til utsvinget x
- strømmen I er analog til hastigheten $\dot{x}$

Disse analogiene mellom mekaniske og elektriske svingesystemer kan utnyttes i praksis. For det første kan man modellere et potensielt stort og utilgjengelig mekanisk system med en liten og grei elektrisk krets på laben. For det andre kan elektriske kretser oversettes til mekaniske svingesystemer, noe som kan gi en lettere intuitiv forståelse for hvordan systemet vil oppføre seg.

b) I forelesningene fant vi at relativt energitap pr periode for underdempede svingninger er

$$\frac{\Delta E}{E} = 1 - e^{-4\pi\delta/\omega}$$

der $\delta = b/2m$, $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ og $\omega_0^2 = k/m$. Vi setter dette uttrykket lik maksimalt energitap pr periode α og får

$$1 - e^{-2\pi b_{\max}/m\sqrt{k/m - b_{\max}^2/4m^2}} = \alpha.$$

Denne ligningen må løses mhp $b_{\max}$, noe som bare er snakk om litt algebra: Samle $1 - \alpha$ på en side, ta ln på begge sider og kvadrer begge sider:

$$\frac{4\pi^2 b_{\max}^2}{km - b_{\max}^2/4} = [\ln(1 - \alpha)]^2$$

Dermed:

$$b_{\max}^2 \left(4\pi^2 + [\ln(1 - \alpha)]^2 / 4 \right) = km [\ln(1 - \alpha)]^2$$

og

$$b_{\max}^2 = \frac{4km [\ln(1 - \alpha)]^2}{16\pi^2 + [\ln(1 - \alpha)]^2}$$

Divisjon med $[\ln(1 - \alpha)]^2$ over og under brøkstreken gir endelig

$$b_{\max} = \frac{\sqrt{4km}}{\sqrt{1 + [4\pi / \ln(1 - \alpha)]^2}}$$

som skulle vises.

Dersom dempingen skal være veldig svak, dvs $\alpha \ll 1$, kan vi bestemme $b_{\max}$ direkte ved å sette

$$\frac{\Delta E}{E} \simeq \frac{4\pi\delta}{\omega_0} = \frac{2\pi b}{m\omega_0} = \frac{2\pi b}{\sqrt{km}}$$

Dermed blir

$$b_{\max} = \alpha \frac{\sqrt{km}}{2\pi}$$

Alternativt kan en ta utgangspunkt i det eksakte uttrykket for $b_{\max}$, tilnærme logaritmeleddet med $\ln(1 - \alpha) \simeq -\alpha$ og få nøyaktig samme svar for $b_{\max}$.

c) Utregning av $G(\omega)$ og ϕ_0 :

Med $Q(t) = Q_0 \sin(\omega t + \phi_0)$ har vi

$$\dot{Q} = \omega Q_0 \cos(\omega t + \phi_0)$$

og

$$\ddot{Q} = -\omega^2 Q_0 \sin(\omega t + \phi_0)$$

som innsatt i ligningen for Q gir

$$-L\omega^2 Q_0 \sin(\omega t + \phi_0) + R\omega Q_0 \cos(\omega t + \phi_0) + \frac{1}{C} Q_0 \sin(\omega t + \phi_0) = V_0 \cos \omega t$$

For å komme videre her, må vi bruke at $\sin(a + b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$ og $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$. Da har vi

$$\begin{aligned} -L\omega^2 Q_0 \sin \phi_0 \cos \omega t - L\omega^2 Q_0 \cos \phi_0 \sin \omega t &+ R\omega Q_0 \cos \phi_0 \cos \omega t - R\omega Q_0 \sin \phi_0 \sin \omega t + \\ \frac{1}{C} Q_0 \sin \phi_0 \cos \omega t + \frac{1}{C} Q_0 \cos \phi_0 \sin \omega t &- V_0 \cos \omega t = 0 \end{aligned}$$

Dersom denne ligningen skal være oppfylt til alle tider, dvs for vilkårlig verdi av t , må leddene som inneholder $\sin \omega t$ og de som inneholder $\cos \omega t$ summere seg til null hver for seg. Følgelig:

$$\begin{aligned} -L\omega^2 Q_0 \cos \phi_0 - R\omega Q_0 \sin \phi_0 + \frac{1}{C} Q_0 \cos \phi_0 &= 0 \\ -L\omega^2 Q_0 \sin \phi_0 + R\omega Q_0 \cos \phi_0 + \frac{1}{C} Q_0 \sin \phi_0 - V_0 &= 0 \end{aligned}$$

Ettersom Q_0 ikke er lik null, gir den første av disse ligningene

$$\begin{aligned} R \sin \phi_0 &= \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right) \cos \phi_0 \\ R^2 (1 - \cos^2 \phi_0) &= \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right)^2 \cos^2 \phi_0 \\ R^2 &= \left[R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right)^2 \right] \cos^2 \phi_0 \\ \cos \phi_0 &= \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{R}{G} \end{aligned}$$

mens fra den andre har vi

$$Q_0 = \frac{V_0/\omega}{R \cos \phi_0 + (1/\omega C - \omega L) \sin \phi_0}$$

Da er vi nesten i mål ettersom vi kjenner $\cos \phi_0$, og dermed $\sin \phi_0$. Vi setter inn $\cos \phi_0 = R/G$, $\sin \phi_0 = \sqrt{1 - R^2/G^2}$ og $1/\omega C - \omega L = \sqrt{G^2 - R^2}$:

$$Q_0 = \frac{V_0/\omega}{R^2/G + \sqrt{G^2 - R^2} \sqrt{1 - R^2/G^2}} = \frac{V_0}{\omega G}$$

Nå kan en kanskje lure på om alle fortegn ble riktige i de ulike overgangene ovenfor, siden vi har kvadrert og tatt kvadratroten både her og der. Og en smule skepsis er faktisk på sin plass, i hvert fall når det gjelder fasevinkelen ϕ_0 . Resultatet $\cos \phi_0 = R/G$ betyr at ϕ_0 må ligge i 1. eller 4. kvadrant, dvs i intervallet $(-\pi/2, \pi/2)$, ettersom både R og G er positive størrelser. Men vi har mistet fortegnet på ϕ_0 underveis, siden $\cos \phi_0 = \cos(-\phi_0)$. Det hadde vært bedre å uttrykke fasevinkelen ved hjelp av tangens-funksjonen. Fra ligningen

$$R \sin \phi_0 = \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right) \cos \phi_0$$

har vi

$$\tan \phi_0 = \frac{\sin \phi_0}{\cos \phi_0} = \frac{1/\omega C - \omega L}{R}$$

og vi ser at ϕ_0 kan bli positiv eller negativ, avhengig av om telleren er positiv eller negativ. Du ser at selv for et enkelt system som dette, ender vi opp med tildels grisete regning, og en kan jo spørre seg om det ikke er en enklere vei til målet. Svaret på det er ja, under forutsetning av at man er villig til å ta i bruk komplekse størrelser. Bakerst i løsningsforslaget har jeg tatt med litt om dette.

Vi har størst mulig ladningsamplitude Q_0 når nevneren $\omega G(\omega)$ er minst mulig. Ettersom både ω og $G(\omega)$ er positive størrelser, kan vi like gjerne finne den frekvensen som gjør $\omega^2 G^2(\omega)$ minimal, noe som er hensiktsmessig her. Vi regner ut:

$$\omega^2 G^2(\omega) = \omega^2 (R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2) = L^2 \omega^4 + (R^2 - 2L/C) \omega^2 + 1/C^2$$

Denne funksjonen kan vi nå derivere mhp ω og sette lik null for å finne minimum. Eller vi kan innføre $z = \omega^2$ og derivere mhp z :

$$\frac{d}{dz} (L^2 z^2 + (R^2 - 2L/C) z + 1/C^2) = 2L^2 z + R^2 - 2L/C = 0$$

som gir

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

Med oppgitte tallverdier:

$$\omega_1 = \sqrt{10^{12} - \frac{1}{2} \cdot 10^{12}} \simeq 0.7 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

Strømmen er

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \omega Q_0 \cos(\omega t + \phi_0)$$

som betyr at strøamplituden er

$$I_0 = \omega Q_0 = \frac{V_0}{G(\omega)}$$

Følgelig har vi maksimal I_0 for minimal $G(\omega)$, noe som åpenbart inntreffer når

$$\omega L - 1/\omega C = 0$$

dvs

$$\omega_2 = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Med oppgitte tallverdier:

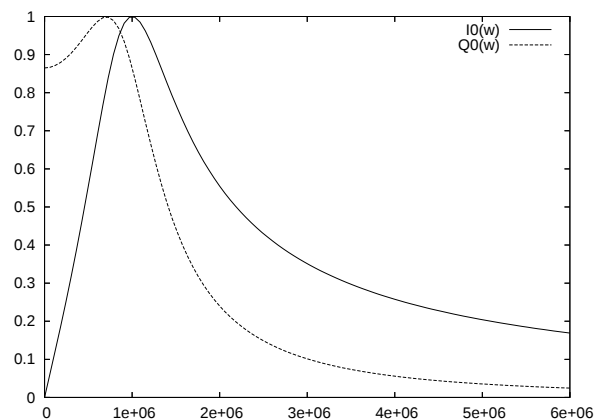
$$\omega_2 = 10^6 \text{ Hz}$$

Tilhørende fasekonstanter:

$$\phi_{01} = \arccos \frac{R}{G(\omega_1)} = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 35^\circ$$

$$\phi_{02} = \arccos \frac{R}{G(\omega_2)} = \arccos 1 = 0$$

Det kan være en ide å tegne opp amplitudene Q_0 og I_0 som funksjon av vinkelfrekvensen til spenningskilden, med gjeldende verdier for R , L og C :



Vi ser at det her er snakk om forholdsvis brede resonanskurver. Godhetsfaktoren er

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = 1$$

der vi har brukt definisjonen for det mekaniske svingesystemet, $Q = m\omega_0/b$, samt analogiene $m \leftrightarrow L$ og $b \leftrightarrow R$. En Q -verdi på 1 innebærer at bredden på resonanskurven er av samme størrelsesorden som resonansfrekvensen selv.

Kommentarer:

1. Litt om generalisert motstand, eller *impedans*. (Vi innførte impedansbegrepet i FY1003/TFY4155, og det blir mer om dette i fag som FY1013 Elmag II og TFY4185 Måleteknikk.)

Hvis vi har en likestrømkrets, dvs med en konstant spenningskilde V_0 , og finner at spenningskilden leverer en strøm I_0 til kretsen, kan vi bestemme kretsens (totale) elektriske motstand fra Ohms lov:

$$R = \frac{V_0}{I_0}$$

Hvis vi har en vekselstrømkrets, med en spenningskilde $V_0 \cos \omega t$, og finner at spenningskilden leverer en strøm $I_0 \cos(\omega t + \phi_0)$ til kretsen, defineres kretsens generaliserte motstand, eller *impedans* Z på tilsvarende vis:

$$Z = \frac{V_0}{I_0}$$

For RCL-kretsen i denne øvingen finner vi at

$$Z = G(\omega) = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

Med andre ord, impedansen Z avhenger av (vinkel-)frekvensen ω til den påtrykte spenningen. Impedansen er minimal dersom $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, kretsens resonansfrekvens. Da er strømstyrken maksimal, og strømmen $I(t)$ svinger i fase med den påtrykte spenningen. (Vi fant jo $\phi_{02} = 0$ ovenfor.)

Det er ingenting i veien for å benytte impedansbegrepet også i det mekaniske systemet, og mekanisk impedans defineres på tilsvarende vis, som forholdet mellom påtrykt kraft og resulterende hastighet:

$$Z = \frac{F_0}{v_0}$$

Benytter vi analogien mellom størrelsene i det mekaniske og det elektriske svingesystemet, kan vi uten videre skrive ned uttrykket for den mekaniske impedansen til systemet i oppgavens figur A:

$$Z = \sqrt{b^2 + (\omega m - k/\omega)^2}$$

2. Tvungen svingning: løsning ved hjelp av kompleks regning.

Et åpenbart irritasjonsmoment i løsningen av oppgave c ovenfor var det faktum at vi fikk inn både sinuser og cosinuser, og derfor måtte styre en del med trigonometriske relasjoner. Og vi innser fort at dette er uunngåelig dersom vi starter med å skrive løsningen for Q (eventuelt x) som en cosinus eller en sinus: Derivasjon *en* gang gjør sinus om til cosinus, og omvendt, og hvis vi har damping, har vi jo nettopp et ledd som er proporsjonalt med den deriverte av Q (eventuelt x).

Løsningen på dette problemet har vi vært innom allerede, i og med at vi utledet løsningen av fri, dempede svingninger ved å starte med en *eksponentialfunksjon*. La oss forsøke det samme her: Vi setter

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t}$$

i det vi husker på at den fysiske påtrykte spenningen egentlig er

$$V_0 \cos \omega t = \operatorname{Re} (V_0 e^{i\omega t})$$

Vi *kompliserer* altså problemet ved å innføre en kompleks representasjon av den reelle størrelsen $V(t)$, men samtidig *forenkler* vi problemet rent regneteknisk, i og med at eksponentialfunksjonen har seg selv som løsning, uansett hvor mange ganger vi deriverer den (eller integrerer den, for den saks skyld).

Det er vel nå temmelig opplagt at en partikulærløsning av differensialligningen for Q må være på formen

$$Q(t) = Q_0 e^{i\omega t}$$

(og vi glemmer ikke at den fysiske ladningen får vi ved å ta realdelen av dette.) Innsetting gir

$$\left(-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C}\right) Q_0 e^{i\omega t} = V_0 e^{i\omega t}$$

siden vi får ned en faktor $i\omega$ for hver gang vi deriverer $Q(t)$ mhp t . Dermed får vi

$$Q_0 = \frac{V_0}{-\omega^2 L + i\omega R + 1/C} = \frac{V_0}{i\omega (R + i\omega L + 1/i\omega C)}$$

Strømmen blir

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = Q_0 i\omega e^{i\omega t} = \frac{V_0}{R + i\omega L + 1/i\omega C} e^{i\omega t}$$

dvs med amplitude

$$I_0 = \frac{V_0}{R + i\omega L + 1/i\omega C}$$

Dette komplekse tallet kan skrives som

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} e^{-i\beta}$$

der

$$\tan \beta = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

(Vi ser at $\beta = -\phi_0$.) Den *fysiske*, reelle strømstyrken blir realdelen av den beregnede komplekse $I(t)$:

$$I_{\text{fysisk}}(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \cos(\omega t - \beta)$$

Impedansen Z kan nå oppfattes som en kompleks størrelse,

$$Z \equiv \frac{V}{I} = \frac{V_0}{I_0} = \frac{V_0}{|I_0|} e^{i\beta}$$

med absoluttverdi $|Z| = V_0/|I_0|$ og fasevinkel β .

Tilbake til ladningen på kondensatoren: Det komplekse uttrykket for amplituden Q_0 kan skrives slik:

$$Q_0 = \frac{V_0}{\omega \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} e^{-i\pi/2 - i\beta}$$

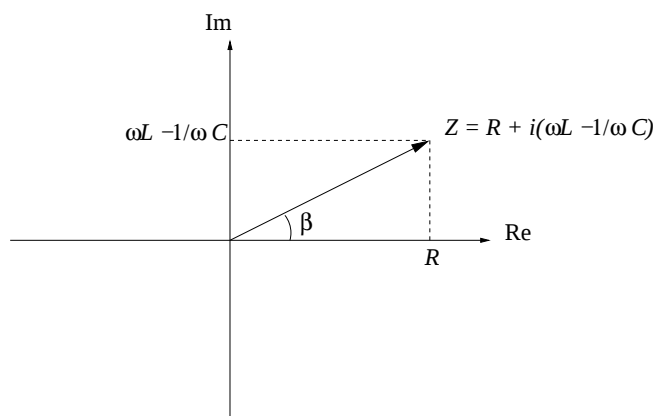
Den fysiske ladningen er realdelen av $Q(t)$:

$$Q_{\text{fysisk}}(t) = \frac{V_0}{\omega \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \cos(\omega t - \pi/2 - \beta)$$

som er det samme som vi fant med reell regning, siden

$$\cos(\omega t - \pi/2 - \beta) = \sin(\omega t - \beta) = \sin(\omega t + \phi_0)$$

Illustrasjon av impedansen i det komplekse planet:



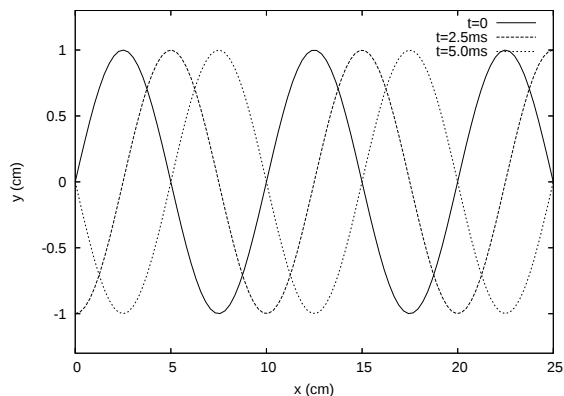
Løsningsforslag til øving 3

Oppgave 1

a)

$$y = A \sin(kx - \omega t) = A \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] \quad (1)$$

med $A = 1.0$ cm, $T = 10$ ms og $\lambda = 10$ cm.



Utsvinget vil bli det samme som for $t = 0$ for hver hele periode, dvs for $t = nT = 10n$ ms, der $n = 1, 2, 3, \dots$

b) Vi ser av figuren ovenfor, og har allerede i punkt a slått fast at $T = 10$ ms.

c) Vi ser av figuren ovenfor, og har allerede i punkt a slått fast at $\lambda = 10$ cm.

d) En bølgetopp forplanter seg en bølgelengde $\lambda = 10$ cm på en periode $T = 10$ ms. Altså er fasehastigheten

$$v_f = \frac{\lambda}{T} = \frac{0.10 \text{ m}}{0.010 \text{ s}} = 10 \text{ m/s}$$

Hastigheten til strengementene (i y -retning) er gitt ved:

$$v_p = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (A \sin(kx - \omega t)) = -\omega A \cos(kx - \omega t). \quad (2)$$

Maksimalverdien av $\cos(kx - \omega t)$ er 1. Altså er maksimalhastighet for et strengement:

$$v_p^{\max} = \omega A = 200\pi \text{ s}^{-1} \cdot 0.010 \text{ m} = 2\pi \text{ m/s} \approx 6.3 \text{ m/s}$$

e)

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (A \sin(kx - \omega t)) = \frac{\partial}{\partial t} (-\omega A \cos(kx - \omega t)) = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t) \quad (3)$$

som har maksimalverdi

$$a^{\max} = \omega^2 A = (200\pi \text{ s}^{-1})^2 \cdot 0.010 \text{ m} = 3.9 \cdot 10^3 \text{ m/s}^2.$$

f) Vi har

$$\sin u = \cos\left(u - \frac{\pi}{2}\right).$$

Derfor, dersom vi velger $\phi = -\pi/2$, vil $y = A \cos(kx - \omega t + \phi)$ beskrive samme bølge som $y = A \sin(kx - \omega t)$.

Merknad: Fra (1), (2) og (3) har vi

$$\begin{aligned} y &= A \sin(kx - \omega t) \\ v_p &= -\omega A \cos(kx - \omega t) = -\omega A \sin\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \omega A \sin\left(kx - \omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \omega A \sin\left[kx - \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right] \\ a &= -\omega^2 A \sin(kx - \omega t) = \omega^2 A \sin(kx - \omega t - \pi) = \omega^2 A \sin[kx - (\omega t + \pi)]. \end{aligned}$$

Med andre ord så sier vi at a i tid er faseforskjøvet $\pi/2$ foran v_p som igjen er faseforskjøvet $\pi/2$ foran y .

Oppgave 2

a)

$$\begin{aligned} y_3 &= y_1 + y_2 \\ &= A \cos(kx - \omega t + \phi_1) + A \cos(kx - \omega t + \phi_2) \\ &= 2A \cos \frac{kx - \omega t + \phi_1 + kx - \omega t + \phi_2}{2} \cdot \cos \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \\ &= 2A \cos\left(kx - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \cos \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \\ &= A_3 \cos(kx - \omega t + \phi_3) \end{aligned} \tag{4}$$

der vi har satt

$$A_3 \equiv 2A \cos \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \equiv 2A \cos \frac{\Delta\phi}{2} \tag{5}$$

$$\phi_3 = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \tag{6}$$

b) $|A_3|$ har maksimalverdi når

$$\left| \cos \frac{\Delta\phi}{2} \right| = 1,$$

dvs når $\Delta\phi/2 = n \cdot \pi, n = 0, 1, 2, \dots$, dvs når $\Delta\phi = n \cdot 2\pi, n = 0, 1, 2, \dots$
 Da får vi $|A_3|^{\max} = 2A$ (Bølgene adderes i fase.)

$|A_3|$ har minimalverdi nr

$$\cos \frac{\Delta\phi}{2} = 0,$$

dvs når $\Delta\phi/2 = (2n + 1) \cdot \pi/2, n = 0, 1, 2, \dots$, dvs når $\Delta\phi = (2n + 1) \cdot \pi, n = 0, 1, 2, \dots$
 Da får vi $|A_3|^{\min} = 0$ (Bølgene adderes i motfase.)

Oppgave 3

a) Vi har:

$$\frac{\partial^2 D_1(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 D_1(x, t)}{\partial t^2}. \quad (7)$$

og

$$\frac{\partial^2 D_2(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 D_2(x, t)}{\partial t^2}. \quad (8)$$

(7) + (8) gir (siden partiell derivasjon er en lineær operasjon):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 D(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 [D_1(x, t) + D_2(x, t)]}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 D_1(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D_2(x, t)}{\partial x^2} \\ &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 D_1(x, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 D_2(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 [D_1(x, t) + D_2(x, t)]}{\partial t^2} \\ &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 D(x, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (9)$$

b) Vi betrakter først $f(x - vt)$ og setter $\xi = x - vt$. Vi får da:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial t}}_{=-v} = -v \frac{\partial f}{\partial \xi} \quad (10)$$

og videre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) = -v \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial t}}_{=-v} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \quad (11)$$

eller

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \quad (12)$$

Helt tilsvarende (da $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1$) får vi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \quad (13)$$

(12) og (13) gir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (14)$$

som viser at $f(x - vt)$ oppfyller lign. (1) i oppgaveteksten.

På helt tilsvarende vis (bortsett fra at vi ikke får minustegn foran v som i (10) og (11)) får vi:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \quad (15)$$

Punkt a og lign. (14) og (15) gir da at:

$$D(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

oppfyller lign. (1) i oppgaveteksten.

Løsningsforslag til øving 4

Oppgave 1

a) Bølgehastigheten for transversale bølger på en streng er utledet i forelesningene. Vi får

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}} = \sqrt{\frac{8.5}{0.028}} \simeq 17 \text{ m/s}$$

Vi har ikke dispersjon i dette systemet, så v er den samme for alle bølger, uansett frekvens.

b)

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu$$

som gir bølgelengden

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \simeq 17 \text{ m}$$

Ettersom λ er omvendt proporsjonal med ν , vil en frekvens på 3.0 Hz resultere i en bølgelengde på ca 5.8 m.

c) Vi har harmoniske bølger som kan beskrives ved

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \phi)$$

der $k = 2\pi/\lambda$ er bølgetallet og ϕ en fasekonstant. Vi velger $x = 0$ ved svingekilden og har

$$y(0, t) = A \cos(-\omega t + \phi) = A \cos \omega t$$

som gir $\phi = 0$ siden $\cos u = \cos(-u)$. Dermed er bølgen beskrevet ved

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

For $x = 1.0$ og $x = 5.0$ m får vi

$$y(1.0, t) \simeq A \cos\left(2\pi \frac{1.0}{17} - 2\pi t\right)$$

$$y(5.0, t) \simeq A \cos\left(2\pi \frac{5.0}{17} - 2\pi t\right)$$

med t målt i sekunder. Faseforskjellen mellom utsvinget i disse to posisjonene er

$$\Delta\phi = \frac{8\pi}{17} \simeq 1.4 \simeq 83^\circ$$

Oppgave 2

a)

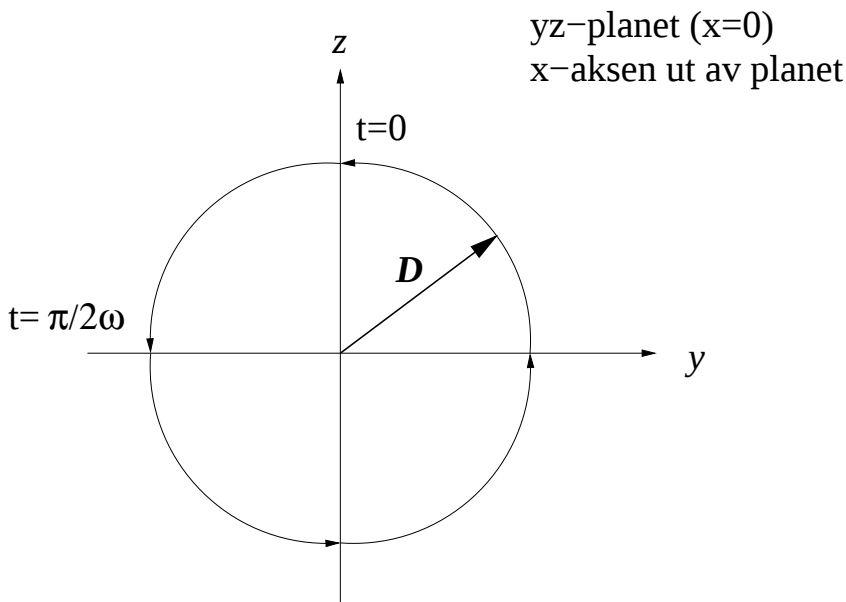
$$\begin{aligned} |\vec{D}| &= D_0 [\cos^2(kx - \omega t) + \sin^2(kx - \omega t)]^{1/2} \\ &= D_0 \end{aligned}$$

for alle x og t . Med andre ord, vi har overalt og til enhver tid et utsving med konstant amplitude D_0 . Dette betyr at spissen på vektoren $\vec{D}$ alltid ligger på en sirkel med radius D_0 . Siden både D_z og D_y kontinuerlig gjennomløper alle verdier mellom $-D_0$ og $+D_0$, må $\vec{D}$ kontinuerlig gjennomløpe alle punkter på sirkelen. Dvs at bølgen er sirkulærpolarisert.

b)

$$\begin{aligned} D_z &= D_0 \cos(kx - \omega t) = D_0 \cos(\omega t - kx) \\ D_y &= D_0 \sin(kx - \omega t) = D_0 \cos(kx - \omega t - \pi/2) \\ &= D_0 \cos[(\omega t + \pi/2) - kx] \end{aligned}$$

Dette betyr at for alle verdier av x ligger D_y faseforskjøvet $\pi/2$ foran D_z . F.eks. vil D_y nå sin maksimalverdi $+D_0$ en fase $\pi/2$ tidligere enn D_z . Når $D_y = +D_0$, er $D_z = 0$, og $D_y = 0$ nr $D_z = +D_0$. Dvs at vi for enhver verdi av x (f.eks. $x = 0$) har en situasjon som skissert nedenfor:



Bølgen forplanter seg i positiv x -retning. Vi ser derfor av skissen ovenfor at $\vec{D}$ roterer mot urviseren for en observatør som ser mot bølgens forplantningsretning. Bølgen er altså venstre-sirkulærpolarisert.

c) Skal vi ha en bølge som er høyre-sirkulærpolarisert, må vi la D_z ligge en fase $\pi/2$ foran D_y . Det får vi ved f.eks.

$$D_z = D_0 \sin(kx - \omega t)$$

og

$$D_y = D_0 \cos(kx - \omega t)$$

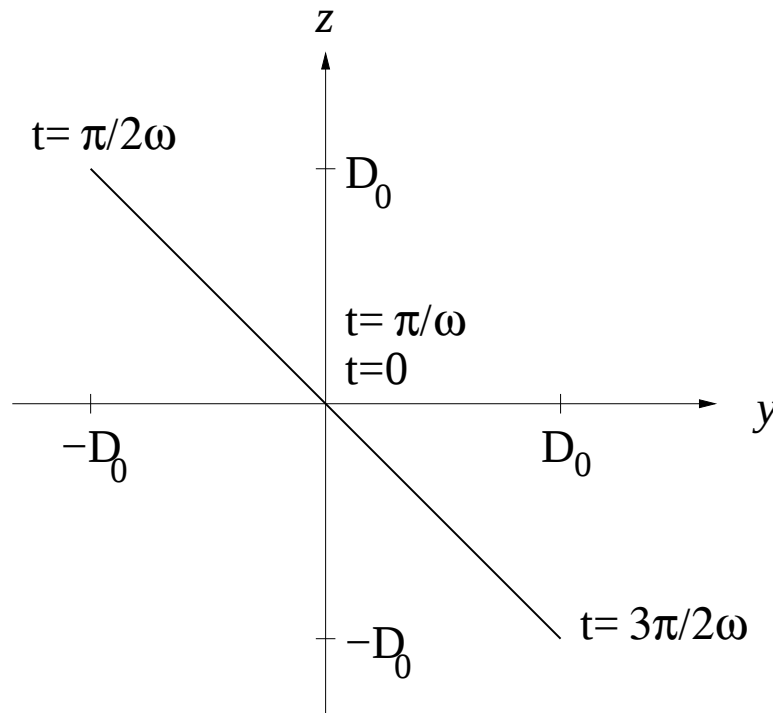
d) Vi har at

$$\sin(kx - \omega t + \pi) = -\sin(kx - \omega t)$$

slik at for bølgen beskrevet ved

$$\mathbf{D} = D_0 \sin(kx - \omega t) \hat{y} + D_0 \sin(kx - \omega t + \pi) \hat{z}$$

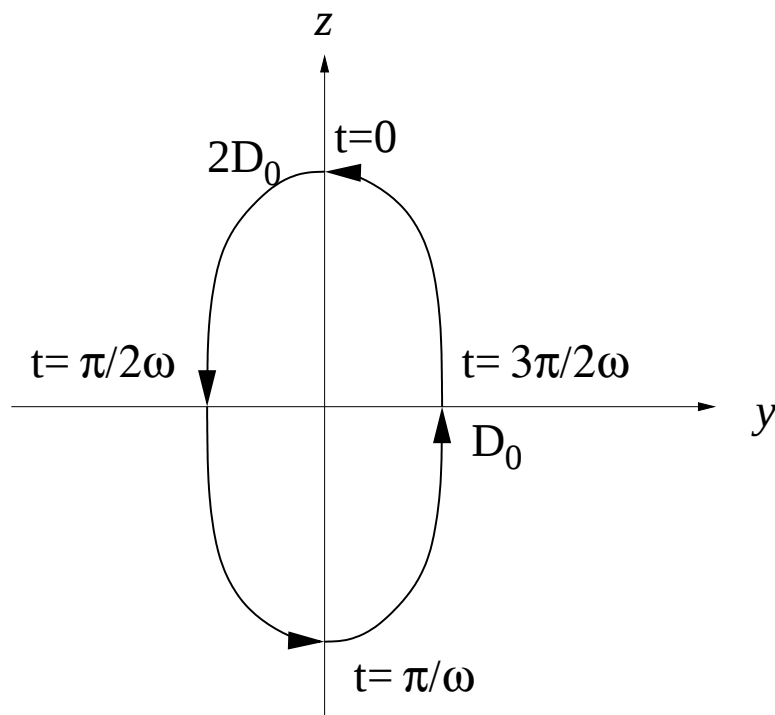
vil vi ha like stor y - og z -komponent, men med motsatt fortegn. Det skulle da bli følgende rette linje i yz -planet ($z = -y$):



For bølgen beskrevet ved

$$\mathbf{D} = D_y \hat{y} + D_z \hat{z} = D_0 \sin(kx - \omega t) \hat{y} + 2D_0 \cos(kx - \omega t) \hat{z}$$

får vi en ellipse i yz -planet:



ettersom vi har

$$\left(\frac{D_y}{D_0}\right)^2 + \left(\frac{D_z}{2D_0}\right)^2 = \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$$

dvs ellipse med akse D_0 i y -retning og akse $2D_0$ i z -retning.

Oppgave 3

a) Longitudinale utsving på ei slik fjær oppfyller bølgeligningen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\mu}{K} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

og det eneste vi krever av funksjonen $\xi(x, t)$ er at den kan skrives på formen $f(x - vt)$ eller $g(x + vt)$, eller en kombinasjon av disse to, der f og g er vilkårlige to ganger deriverbare funksjoner. Den oppgitte gaussformede bølgepulsen er på en slik form ($f(x - vt)$) og representerer dermed en mulig bølgepuls langs fjæra. Bølgen propagerer i positiv x -retning.

b) Som utledet i forelesningene, og som vi ser av ligningen ovenfor, har vi

$$v = \sqrt{\frac{K}{\mu}}$$

Uttrykket på høyre side har dimensjon

$$\sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{m/s}^2}{\text{kg/m}}} = \sqrt{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \text{m/s}$$

som er det vi skal ha.

c) Bølgepulsens energi endrer seg ikke med tiden. Vi kan derfor beregne E for et hvilket som helst tidspunkt, for eksempel $t = 0$. Med energi $\varepsilon(x, 0) dx$ på intervallet $(x, x + dx)$, må total energi være

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x, 0) dx$$

Her inngår størrelsen $d\xi/dx$, og med $t = 0$ har vi

$$\frac{d\xi}{dx} = \xi_0(-2x/a^2)e^{-x^2/a^2}$$

som gir

$$\varepsilon(x, 0) = \frac{2\mu v^2 \xi_0^2}{a^2} \frac{2x^2}{a^2} e^{-2x^2/a^2}$$

Vi substituerer $\beta = \sqrt{2}x/a$ som gir (med $dx = a d\beta/\sqrt{2}$)

$$E = \frac{2\mu v^2 \xi_0^2}{\sqrt{2}a} \int_{-\infty}^{\infty} \beta^2 e^{-\beta^2} = \frac{2\mu v^2 \xi_0^2}{\sqrt{2}a} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi} \mu v^2 \xi_0^2}{\sqrt{2}a}$$

som skulle vises.

Løsningsforslag til øving 5

Oppgave 1

a) Innsetting av den antatte løsningen gir

$$\begin{aligned}
 \xi(x+d) - \xi(x) &= \xi_0 [\sin(kx+kd-\omega t) - \sin(kx-\omega t)] \\
 &= \xi_0 \cdot 2 \cos \frac{kx+kd-\omega t+kx-\omega t}{2} \sin \frac{kx+kd-\omega t-kx+\omega t}{2} \\
 &= 2\xi_0 \cos(kx-\omega t + \frac{kd}{2}) \sin \frac{kd}{2} \\
 \xi(x-d) - \xi(x) &= \xi_0 [\sin(kx-kd-\omega t) - \sin(kx-\omega t)] \\
 &= \xi_0 \cdot 2 \cos \frac{kx-kd-\omega t+kx-\omega t}{2} \sin \frac{kx-kd-\omega t-kx+\omega t}{2} \\
 &= -2\xi_0 \cos(kx-\omega t - \frac{kd}{2}) \sin \frac{kd}{2}
 \end{aligned}$$

b) I neste omgang bestemmer vi høyre side i bevegelsesligningen oppgitt i oppgaveteksten ved å legge de to uttrykkene i punkt a sammen. Vi benytter oss av de trigonometriske relasjonene

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

og får

$$\begin{aligned}
 \xi(x+d) + \xi(x-d) - 2\xi(x) &= 2\xi_0 \sin \frac{kd}{2} \left[\cos(kx-\omega t + \frac{kd}{2}) - \cos(kx-\omega t - \frac{kd}{2}) \right] \\
 &= 2\xi_0 \sin \frac{kd}{2} [\cos(kx-\omega t) \cos \frac{kd}{2} - \sin(kx-\omega t) \sin \frac{kd}{2} \\
 &\quad - \cos(kx-\omega t) \cos \frac{kd}{2} - \sin(kx-\omega t) \sin \frac{kd}{2}] \\
 &= -4\xi_0 \sin^2 \frac{kd}{2} \sin(kx-\omega t)
 \end{aligned}$$

Her har vi også brukt at $\sin a = -\sin(-a)$ og $\cos a = \cos(-a)$. På venstre side av bevegelsesligningen inngår den andrederiverte av ξ med hensyn på t :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 \xi_0 \sin(kx-\omega t)$$

Vi setter alt sammen inn i bevegelsesligningen, forkorter felles faktor ξ_0 og $\sin(kx-\omega t)$ på begge sider, og får

$$-m\omega^2 = -4s \sin^2 \frac{kd}{2}$$

dvs

$$\omega^2 = \frac{4s}{m} \sin^2 \frac{kd}{2}$$

som vi skulle vise.

c) Når $kd \ll 1$, kan vi sette

$$\sin^2 \frac{kd}{2} \simeq \frac{k^2 d^2}{4}$$

slik at

$$\omega^2 \simeq \frac{4s}{m} \cdot \frac{k^2 d^2}{4} = \frac{sk^2 d^2}{m}$$

som gir

$$v = \frac{\omega}{k} \simeq \sqrt{\frac{sd^2}{m}}$$

dvs uavhengig av bølgelengden (og bølgetallet).

d) Lydens hastighet i metaller har vi sett eksempler på i forelesningene. La oss si at bølgehastigheten er omtrent 1000 m/s. Det hørbare området dekker frekvenser mellom ca 20 og 20000 Hz, som dermed tilsvarer bølgelengder

$$\lambda = \frac{v}{\nu}$$

i området mellom 5 cm og 50 m. Dette er uansett veldig mye mer enn typiske avstander mellom naboatomer i en krystall (mindre enn 1 nm), så for hørbar lyd er tilnærmelsen $kd \ll 1$, eventuelt $\lambda \gg d$ godt oppfylt.

Oppgave 2

a) Svar C er korrekt. Fasehastigheten er gitt ved

$$v = \frac{\omega}{k}$$

og vi ser fra figuren at dette forholdet er størst for små verdier av k , dvs for lange bølgelengder.

b) Svar B er korrekt. Bølgehastigheten er gitt ved

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

slik at en endring i S til $S + \Delta S$ gir hastigheten

$$\begin{aligned} v' &= \sqrt{\frac{S + \Delta S}{\mu}} = \sqrt{\frac{S(1 + \Delta S/S)}{\mu}} \\ &= \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot \sqrt{1 + \Delta S/S} \simeq \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot (1 + \Delta S/2S) = v \cdot (1 + \Delta S/2S) \end{aligned}$$

Følgelig er

$$\Delta v = v' - v = v \Delta S/2S$$

c) Svar A er korrekt. Bølgehastigheten er gitt ved

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

slik at en endring i μ til $\mu + \Delta\mu$ gir hastigheten

$$\begin{aligned} v' &= \sqrt{\frac{S}{\mu + \Delta\mu}} = \sqrt{\frac{S}{\mu(1 + \Delta\mu/\mu)}} \\ &= \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta\mu/\mu}} \simeq \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot (1 - \Delta\mu/2\mu) = v \cdot (1 - \Delta\mu/2\mu) \end{aligned}$$

Følgelig er

$$\Delta v = v' - v = -v\Delta\mu/2\mu$$

Oppgave 3

a) Bølgelengden:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{330}{1000} \text{ m} = 33 \text{ cm}$$

Intensitetsnivået β målt i dB er definert ved

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

der referanseintensiteten $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$. Med $I = 10^{-9} \text{ W/m}^2$ har vi

$$\beta = 10 \log \frac{10^{-9}}{10^{-12}} = 10 \cdot 3 = 30 \text{ dB}$$

Intensiteten I tilsvarer en (midlere) effekt P pr flateenhet A . Effekten som mottas på en flate med areal 0.5 cm^2 blir dermed

$$P = I \cdot A = 10^{-9} \text{ W/m}^2 \cdot 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 5 \cdot 10^{-14} \text{ W}$$

(som er under forutsetning av at lydbølgen faller normalt inn mot trommehinnen.)

b) Sammenhengen mellom intensiteten I og utsvingsamplituden ξ_0 har vi utledet i forelesningene:

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2 v$$

Her er ρ massetettheten, ω er vinkelfrekvensen, og v er bølgehastigheten. Dermed:

$$\xi_0 = \frac{1}{2\pi\nu} \sqrt{\frac{2I}{\rho v}} = \frac{1}{2000\pi} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-9}}{1.3 \cdot 330}} \text{ m} \simeq 0.34 \text{ nm}$$

Utsvinget er altså her av samme størrelsesorden som molekylenes utstrekning.

Trykkendringen Δp er relatert til utsvinget ξ (se forelesningene):

$$\Delta p = -\gamma p \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Med en plan harmonisk bølge får vi

$$\Delta p(x, t) = -\gamma p k \xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

med amplitude

$$(\Delta p)_0 = \gamma p k \xi_0 = \frac{7}{5} \cdot 10^5 \cdot \frac{2\pi}{0.33} \cdot 0.34 \cdot 10^{-9} \simeq 0.9 \text{ mPa}$$

Relativ trykkvariasjon i forhold til likevektstrykket p blir

$$\frac{(\Delta p)_0}{p} = \frac{0.9 \cdot 10^{-3}}{10^5} = 9 \cdot 10^{-9}$$

Ikke rare greiene!

c) Fra tilstandsligningen for ideell gass, $pV = Nk_B T$ får vi

$$\begin{aligned} \Delta p &= \Delta \left(\frac{Nk_B T}{V} \right) \\ &= \frac{Nk_B}{V} \Delta T - Nk_B T \frac{\Delta V}{V^2} \\ &= \frac{Nk_B T}{V} \frac{\Delta T}{T} - \frac{Nk_B T}{V} \frac{\Delta V}{V} \\ &= p \frac{\Delta T}{T} - p \frac{\Delta V}{V} \end{aligned}$$

Som ventet: En trykkøkning ($\Delta p > 0$) ledsages både av en temperaturøkning ($\Delta T > 0$) og en volumreduksjon ($\Delta V < 0$). Det som gjenstår er å finne ut hvor store ΔT og ΔV er hver for seg. Det får vi til ved å benytte oss av antagelsen om adiabatisk forhold, nemlig

$$pV^\gamma = \text{konstant}$$

Det medfører at

$$\Delta p = -\gamma p \frac{\Delta V}{V}$$

eller

$$-\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta p}{p}$$

som innsatt i uttrykket ovenfor for Δp gir

$$\Delta p = p \frac{\Delta T}{T} + \frac{1}{\gamma} \Delta p$$

og endelig

$$\frac{\Delta T}{T} = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\Delta p}{p}$$

Med andre ord: Temperaturvariasjonen $\Delta T(x, t)$ forplanter seg, på tilsvarende vis som $\Delta p(x, t)$, som en bølge med amplitude

$$(\Delta T)_0 = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{p} (\Delta p)_0$$

Den relative temperaturvariasjonen blir

$$\frac{(\Delta T)_0}{T} = \left(1 - \frac{5}{7}\right) \cdot 9 \cdot 10^{-9} \simeq 3 \cdot 10^{-9}$$

Absolutt temperaturvariasjon blir

$$(\Delta T)_0 \simeq 1 \mu\text{K}$$

Heller ikke rare greiene.

Løsningsforslag til øving 6

Oppgave 1

a) B

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 10 \log \frac{I_1}{I_0} \\
\Rightarrow \frac{\beta_1}{10} &= \log I_1 - \log I_0 \\
\beta_2 &= 10 \log \frac{I_2}{I_0} = \beta_1 + 5 \\
\Rightarrow \frac{\beta_1}{10} + \frac{1}{2} &= \log I_2 - \log I_0 \\
\Rightarrow \log I_2 - \log I_1 &= \frac{1}{2} \\
\Rightarrow \frac{I_2}{I_1} &= 10^{1/2} \simeq 3.16
\end{aligned}$$

b) C

Intensiteten er proporsjonal med utsvingsamplituden kvadrert, mens trykkamplituden er proporsjonal med utsvingsamplituden (se f.eks. oppgave 1b). Dermed blir intensiteten proporsjonal med trykkamplituden kvadrert, og vi finner

$$\frac{p_2}{p_1} = \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} = 10^{1/4} \simeq 1.78$$

c) D

$$\begin{aligned}
I &= \frac{P}{A_{\text{halvkule}}} = \frac{P}{2\pi r^2} = \frac{0.2}{2\pi \cdot 4^2} \simeq 2.0 \text{ mW/m}^2 \\
\Rightarrow \beta &= 10 \log \frac{2.0 \cdot 10^{-3}}{10^{-12}} = 93 \text{ dB}
\end{aligned}$$

Oppgave 2

a) Litt repetisjon: Generelt er hastigheten til mekaniske bølger gitt ved

$$v = \sqrt{\frac{\text{mediets elastiske modul}}{\text{mediets massetetthet}}}$$

Lydhastigheten i en gass er dermed i utgangspunktet gitt ved

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

der B er gassens bulkmodul [N/m^2] og ρ er gassens massetetthet [kg/m^3]. I forelesningene viste vi at for en ideell gass under adiabatisk forhold (ingen utveksling av varme - *det* foregår typisk veldig langsomt i forhold til hvor fort lyden forplanter seg) kan bulkmodulen uttrykkes ved hjelp av trykket p og den såkalte *adiabatkonstanten* $\gamma \equiv C_p/C_V$:

$$B = \gamma p$$

Her er $C_p = (dQ/dT)_p$ gassens varmekapasitet (evt. spesifikk varme) når trykket p holdes konstant, mens $C_V = (dQ/dT)_V$ tilsvarende er varmekapasiteten når volumet V holdes konstant. Symbolet Q angir varme, mens T er temperaturen. For gasser med en-atomige molekyler er $\gamma = 5/3$, og for gasser med to-atomige molekyler er $\gamma = 7/5$. Dermed blir lydhastigheten

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

For ideell gass har vi sammenhengen

$$pV = Nk_B T$$

mellom gassens trykk p , volum V , temperatur T og antall molekyler N . ($k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K er Boltzmanns konstant) Massetettheten kan skrives $\rho = m \cdot N/V$, der m er molekylmassen. Dermed kan lydhastigheten også uttrykkes ved

$$v = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}$$

Vi har her $T = 303$ K og molekylmasse

$$m = 40 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \simeq 6.68 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

Dermed blir lydhastigheten

$$v = \sqrt{\frac{5 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 303}{3 \cdot 6.68 \cdot 10^{-26}}} \simeq 323 \text{ m/s}$$

Dette er ikke langt unna den målte verdien 324.37 m/s, så det tyder på at antagelsene om ideell gass og adiabatisk forhold er gode.

b) Dersom trykket i gassen økes fra 1 til 2 atm uten at temperaturen endres, vil eksperimentet gi uendret lydhastighet, ettersom $v = \sqrt{\gamma k_B T/m}$, dvs egentlig bare avhengig av temperaturen. Dersom trykket i gassen økes fra p_1 til $p_2 = 2p_1$ uten at varme utveksles med omgivelsene (dvs adiabatisk), vil både temperaturen T og massetettheten ρ øke. Vi kan starte med å finne det nye volumet V_2 (dvs: det volumet som ved trykk $p_2 = 2$ atm okkuperes av like mange molekyler

N som ved $p_1 = 1$ atm okkuperte et volum V_1). Vi bruker antagelsen om adiabatisk forhold, $pV^\gamma = \text{konstant}$:

$$\begin{aligned} p_1 V_1^\gamma &= p_2 V_2^\gamma \\ p_1 V_1^\gamma &= 2p_1 V_2^\gamma \\ V_2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{1/\gamma} V_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3/5} V_1 \simeq 0.66V_1 \end{aligned}$$

Ny temperatur T_2 blir dermed

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{p_2 V_2}{Nk_B} \\ &= \frac{2p_1 \cdot 0.66V_1}{Nk_B} \\ &= 1.32 \frac{p_1 V_1}{Nk_B} \\ &= 1.32T_1 \end{aligned}$$

Molekylmassen har ikke endret seg, så den nye lydshastigheten blir

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{\frac{\gamma k_B T_2}{m}} \\ &= \sqrt{1.32} v_1 \\ &= 372.60 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Oppgave 3

Bølgehastigheten er $v = \sqrt{S/\mu} = \sqrt{SL/M}$. Snordraget $S(r)$ i avstand r fra festepunktet er den kraften som skal til for å holde strengbiten mellom r og L i sirkulær bane med vinkelfrekvens $\omega = 2\pi/T$:

$$\begin{aligned} S(r) &= \int_a^L dm = \int_r^L \omega^2 r' \frac{M}{L} dr' \\ &= \frac{\omega^2 M}{2L} (L^2 - r^2) \end{aligned}$$

Med $S(r)$ på plass skulle resten være grei skuring! Bølgehastigheten blir

$$v(r) = \sqrt{S(r)L/M} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{L^2 - r^2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{T} \sqrt{L^2 - r^2}$$

Tiden som en bølgepuls bruker fra festepunktet til strengens ende blir dermed

$$\begin{aligned} \tau &= \int \frac{dr'}{v} \\ &= \frac{T}{\sqrt{2}\pi} \int_0^L \frac{dr'}{\sqrt{L^2 - r'^2}} \\ &= \frac{T}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

der integralet enten kan finnes i Rottmann, eller løses ved f.eks. å substituere $r' = L \sin \alpha$, slik at $dr' = L \cos \alpha d\alpha$ og $\sqrt{L^2 - r'^2} = \cos \alpha$. Legg merke til at vandretiden τ kun avhenger av strengens omløpsperiode T , ikke av lengden L eller massen M . Det kunne vi ha slått fast fra starten av, med ren dimensjonsanalyse: Problemet inneholder kun størrelsene T , M og L . Det går ikke an å lage størrelser med enhet s (sekunde) ved å kombinere kg og m. Da gjenstår bare T .

Oppgave 4

a) Lydhastigheten er

$$v_s = \sqrt{\gamma p / \rho} = \sqrt{\gamma k_B T / M}$$

der adiabatkonstanten er $\gamma = 7/5 = 1.4$ for en gass med toatomige molekyler, og vi har brukt tilstandsligningen $pV = Nk_B T$, evt $p = \rho k_B T / M$ for ideell gass. Midlere kinetiske energi for molekylerne i gassen er oppgitt å være $(3/2)k_B T$, dvs

$$\frac{1}{2} M \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

Her er $\langle v^2 \rangle$ middelveien av kvadratet av molekylernes hastighet $\mathbf{v}$. Det er ingenting spesielt med z -retningen, så vi må ha

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$$

med andre ord

$$v_z = \sqrt{\langle v^2 \rangle / 3} = \sqrt{k_B T / M}$$

Forskjellen mellom v_s og v_z er altså kun en faktor av størrelsesorden 1, helt presist $\sqrt{\gamma} \simeq 1.2$.

b) Vi skal her prøve å finne ut hva som skal til for at antagelsen om adiabatisk forhold *ikke* er en god antagelse. Da må vi ha en varmemestrøm over en lengde tilsvarende en halv bølgelengde i løpet av en tid som er kortere eller sammenlignbar med en halv periode av lydbølgen. Med andre ord, vi må ha

$$v_T \geq \frac{\lambda/2}{T/2} = v_s$$

der v_T angir hastigheten til varmemestrømmen. Hvis vi antar, som sagt i oppgaveteksten, at utveksling av varme skjer ved at raske molekyler kolliderer med langsommere molekyler, kan det ved første øyekast se ut som om varmemestrømmens hastighet kunne være av samme størrelsesorden som lydhastigheten: Et gitt molekyl har, i henhold til punkt a), en midlere hastighet i z -retningen omtrent lik $\sqrt{k_B T / M}$, og det er jo omtrent det samme som lydhastigheten v_s . Riktig raske molekyler skulle da ha enda litt større hastighet, og burde kunne rekke fram til der de langsomme befinner seg (en halv bølgelengde unna) og bidra til varmeutveksling før varme og kalde områder har "byttet plass" (dvs innen en halv periode).

Men vi må huske på at molekylerne kolliderer ustanselig med hverandre. Volumet tilgjengelig per molekyl er $k_B T / p \sim 4 \cdot 10^{-26} \text{ m}^3$, slik at avstanden til nærmeste molekyl bare er noen få nanometer, og gjennomsnittlig strekning som et gitt molekyl beveger seg mellom to påfølgende kollisjoner er av størrelsesorden 10^{-5} cm . ("Midlere fri veilengde", s , avhenger av antall molekyler pr volumenhets, n , samt tverrsnittet på molekylerne, σ : $s \sim 1/n\sigma$, der $n \sim 10^{25} \text{ m}^{-3}$ og

$\sigma \sim 10^{-18} \text{ m}^2$. Disse detaljene går langt utover det vi har snakket om i forelesningene, men det bør være opplagt at midlere fri veilengde mellom kollisjoner må være liten i forhold til f.eks. en centimeter.) Høyeste hørbare frekvenser ligger rundt 20000 Hz. Det tilsvarer en bølgelengde $330/20000 \sim 0.017 \text{ m} = 1.7 \text{ cm}$. Det betyr at molekylene kolliderer *mange* ganger før de har tilbakelagt en strekning som tilsvarer en halv bølgelengde for lyden, og gassen har ingen mulighet for å utveksle varme raskt nok. Konklusjon: Antagelsen om adiabatisk forhold *er* en god antagelse!

Løsningsforslag til øving 7

Oppgave 1

a) I forelesningene har vi utledet sammenhengene mellom amplituden A til innkommende bølge og amplitudene B og C til henholdsvis reflektert og transmittert bølge:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} A \\ C &= \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} A \end{aligned}$$

Her er $\mu_2 = 90$ g/m masse pr lengdeenhet på den tunge delen av strengen, $\mu_1 = 10$ g/m er masse pr lengdeenhet på den lette delen av strengen og $A = 5$ mm. Innsetting av disse tallverdiene gir $B = 2A/4 = 2.5$ mm og $C = 2A/4 = 2.5$ mm.

b) Fra forelesningene har vi følgende uttrykk for midlere effekt transportert med den innkommende bølgen (også oppgitt i oppgaveteksten):

$$\begin{aligned} \overline{P}_i &= \frac{1}{2} v \mu_1 \omega^2 A^2 \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{S/\mu_1} \mu_1 \omega^2 A^2 \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{S \mu_1} \omega^2 A^2 \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot 10 \cdot 10^{-3}} \cdot (10\pi)^2 \cdot (5 \cdot 10^{-3})^2 \\ &= 2.5 \text{ mJ/s} \end{aligned}$$

Andel av effekten som reflekteres er gitt ved refleksjonskoeffisienten $R = \overline{P}_r / \overline{P}_i$:

$$R = \left(\frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} \right)^2 = 0.25 = 25\%$$

Resten blir transmittert:

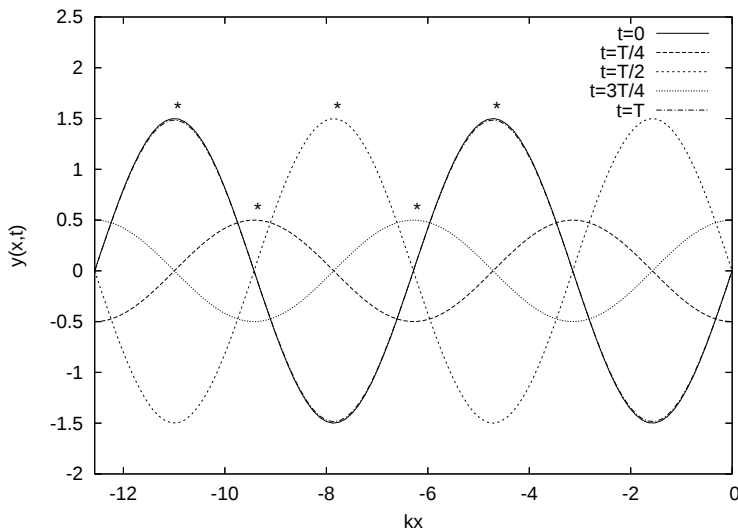
$$T = 1 - R = 0.75 = 75\%$$

c) Utsvinget til venstre for skjøten i $x = 0$ er:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_i(x, t) + y_r(x, t) \\ &= A \left(\sin(kx - \omega t) + \frac{1}{2} \sin(kx + \omega t) \right) \\ &= A \left(\sin kx \cos \omega t - \cos kx \sin \omega t + \frac{1}{2} \sin kx \cos \omega t + \frac{1}{2} \cos kx \sin \omega t \right) \\ &= A \left(\frac{3}{2} \sin kx \cos \omega t - \frac{1}{2} \cos kx \sin \omega t \right) \end{aligned}$$

som er en sum av to stående bølger.

d) Nei, vi kan *ikke* konkludere med at bølgen $y(x, t)$ på den lette delen av strengen ikke transporterer noen netto energi. Riktignok er den en sum av to stående bølger, men på samme måte som en sum av to vandrende bølger sammen kan bli en stående bølge som *ikke* transporterer netto energi, kan en sum av to stående bølger til sammen være en vandrende bølge som transporterer netto energi. Og det er jo tilfelle her. Figuren nedenfor viser øyeblikksbilder av $y(x, t)$ i området mellom $kx = -4\pi$ og $kx = 0$. Stjernene antyder hvordan en bestemt bølgetopp propagerer mot høyre, med varierende amplitude.



e) Uansett skjøtens posisjon kan vi for det første velge $\phi_i = 0$ (for eksempel). Fysikken kan ikke avhenge av hvor vi legger skjøten. Med andre ord: Dersom vi hadde en bestemt sammenheng mellom fasene til y_i og y_r med skjøten i $x = 0$, må vi fortsatt ha den samme bestemte sammenhengen med skjøten i $x = a$. Det oppnår vi ved å velge $\phi_r = -2ka$. Da blir nemlig

$$y_i(a, t) = A \sin(ka - \omega t) = -A \sin(\omega t - ka)$$

og

$$y_r(a, t) = B \sin(ka + \omega t - 2ka) = B \sin(\omega t - ka)$$

dvs

$$y_r(a, t) = -\frac{B}{A} y_i(a, t)$$

den samme sammenhengen mellom y_r og y_i som vi hadde i $x = 0$ med skjøten i $x = 0$, dvs enten y_r og y_i i fase (motsatt fortegn på B og A) eller y_r og y_i i motfase (samme fortegn på B og A) i skjøten. Mer generelt må vi, med skjøten i $x = a$, velge fasekonstanter slik at

$$\phi_r + \phi_i = -2ka$$

Oppgave 2

a) B

Grunntonen på en svingende streng som er festet i begge ender har bølgelengde $\lambda = 2L$, der L er strengens lengde. En bestemt frekvens ν oppnås da ved å sørge for at bølgehastigheten blir

$$v = \lambda\nu = 2\nu L$$

Samtidig vet vi at v er bestemt ved strammingen S og strengens masse pr lengdeenhet μ :

$$v = \sqrt{S/\mu}$$

Strammingen må derfor være

$$\begin{aligned} S &= \mu v^2 \\ &= \frac{m}{L} \cdot 4\nu^2 L^2 \\ &= 4m\nu^2 L \\ &= 4 \cdot 0.0002 \cdot 440^2 \cdot 0.370 \\ &\simeq 57.3 \text{ N} \end{aligned}$$

b) A

Stående lydbølger i et tynt luftfylt rør som er åpent i begge ender, har knutepunkt, $\Delta p = 0$, for trykkbølgen i begge ender, dvs i $x = 0$ og i $x = L$, der $L = 0.5$ m i dette tilfellet. Utsvingsbølgen ξ har dermed maksimal amplitude (buk) i begge ender. Laveste resonansfrekvens (grunntonen) må dermed ha bølgelengde $\lambda = 2L = 1$ m. Med lydhastighet $v = 340$ m/s blir laveste resonansfrekvens

$$\nu = v/\lambda = 340 \text{ Hz}$$

c) C

Rørets resonansfrekvenser er $\nu_n = n \cdot 340$ Hz, med $n = 1, 2, \dots$. Resonans nr n har n knutepunkter for den stående utsvingsbølgen ξ . Altså 4 knutepunkter for moden med frekvens 1360 Hz.

d) D

Vi kan tenke på dette systemet som tvungne svingninger: Den vibrerende gitarstrengen virker som en ekstern harmonisk kraft på luftmolekylene omkring, som dermed tvinges til å svinge fram og tilbake med samme frekvens som den vibrerende strengen. Bølgehastigheten er bestemt ved mediets elastiske egenskaper og mediets massetetthet og er generelt forskjellig for strengen og lufta. Dermed blir også bølgelengden $\lambda = v/\nu$ generelt forskjellig. Når det gjelder amplituden, vil det nok være en sammenheng mellom disse, for et kraftigere anslag på strengen resulterer jo i sterkere lyd. Men som vi har sett i en tidligere øving, vil utsvingsamplituden til luftmolekylene typisk være av størrelsesorden noen få nanometer (med lydintensitet godt under smertegrensen), som åpenbart er mye mindre enn typiske amplituder på en vibrerende gitarstreng.

Løsningsforslag til øving 8

Oppgave 1

a) Vi kan neglisjere k^4 -leddet dersom

$$\frac{S}{\mu} \gg \frac{Y A^2}{4\pi\mu} k^2$$

dvs

$$\frac{4\pi^2}{k^2} \gg \frac{\pi Y A^2}{S}$$

dvs

$$\lambda \gg A \sqrt{\frac{\pi Y}{S}}$$

Innsetting av oppgitte tallverdier gir betingelsen $\lambda \gg 3.9$ cm. For grunntonen, med bølgelengden lik to ganger strengens lengde, vil dette typisk være godt oppfylt på de fleste instrumenter. For høyere harmoniske vil k^4 -leddet etter hvert gjøre seg mer gjeldende.

b) La oss starte med å regne ut v og v_g som funksjoner av bølgetallet k :

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\beta + \alpha k^2}$$

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(vk)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} \\ &= \sqrt{\beta + \alpha k^2} + k \frac{\alpha k}{\sqrt{\beta + \alpha k^2}} \\ &= \frac{\beta + 2\alpha k^2}{\sqrt{\beta + \alpha k^2}} \\ &= v \frac{\beta + 2\alpha k^2}{\beta + \alpha k^2} \end{aligned}$$

Her har vi innført $\beta = S/\mu$ og $\alpha = Y A^2/4\pi\mu$, og vi har skrevet v_g på et par forskjellige måter.

For å finne v og v_g som funksjoner av frekvensen ν , må vi uttrykke k^2 ved ν . Vi må løse ligningen

$$\alpha k^4 + \beta k^2 - 4\pi^2 \nu^2 = 0$$

med hensyn på k^2 . Det gir

$$k^2 = \frac{\beta}{2\alpha} \left(\sqrt{1 + \frac{16\pi^2\alpha}{\beta^2} \nu^2} - 1 \right)$$

og dermed

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{16\pi^2\alpha}{\beta^2} \nu^2} + 1 \right)}$$

$$v_g = 2v \frac{\sqrt{1 + \frac{16\pi^2\alpha}{\beta^2}\nu^2}}{\sqrt{1 + \frac{16\pi^2\alpha}{\beta^2}\nu^2} + 1}$$

Vi ser uten videre at i grensen $\nu \rightarrow 0$ får vi

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{2}} \cdot 2 = \sqrt{\beta} = \sqrt{S/\mu}$$

og

$$v_g = v = \sqrt{S/\mu}$$

som ventet. For riktig høye frekvenser vil leddet som inneholder ν^2 dominere i forhold til 1, og vi får

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{2} \cdot \frac{4\pi\sqrt{\alpha}\nu}{\beta}} = \sqrt{2\pi\sqrt{\alpha}\nu}$$

og

$$v_g = 2v = \sqrt{8\pi\sqrt{\alpha}\nu}$$

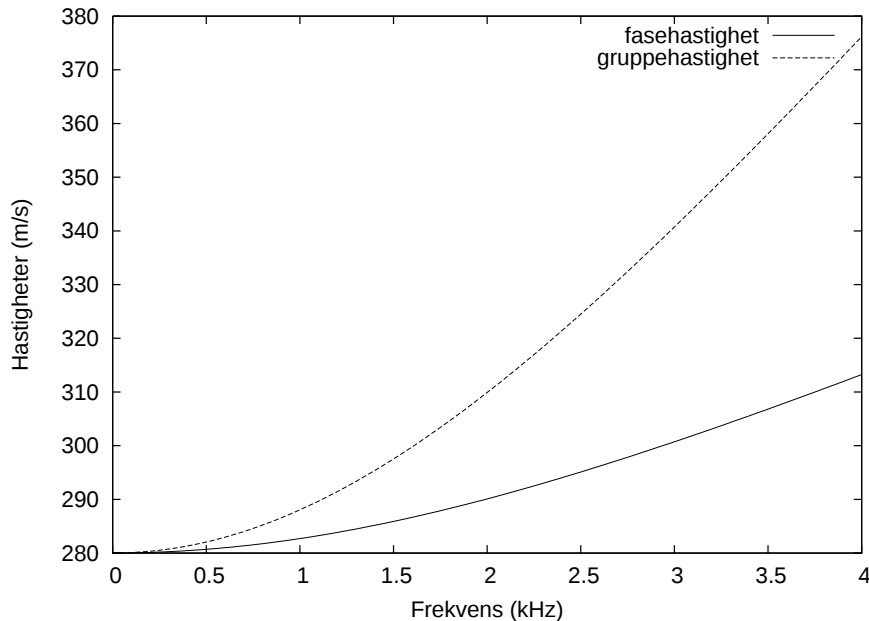
Innsetting av tallverdier gir $\alpha = 3.0625$, $\beta = 78411.5$ og $16\pi^2\alpha/\beta^2 = 7.866 \cdot 10^{-8}$, sistnevnte da med enheten s^2 , ettersom den multiplisert med ν^2 gir en dimensjonsløs størrelse. Dermed:

$$v = 198 \left(\sqrt{1 + 7.866 \cdot 10^{-8}\nu^2} + 1 \right)^{1/2}$$

dvs i enheten m/s når verdier for frekvensen ν settes inn med enhet Hz. Tilsvarende, for gruppehastigheten:

$$v_g = 396 \frac{\sqrt{1 + 7.866 \cdot 10^{-8}\nu^2}}{\left(\sqrt{1 + 7.866 \cdot 10^{-8}\nu^2} + 1 \right)^{1/2}}$$

Innsetting av $\nu = 0, 1, 2, 3$ og 4 kHz gir verdiene 280, 283, 290, 301 og 313 for fasehastigheten v , og verdiene 280, 288, 310, 341 og 376 for gruppehastigheten v_g . Det skulle være tilstrekkelig for å skissere funksjonene $v(\nu)$ og $v_g(\nu)$.



Oppgave 2

Fasehastigheten:

$$v = \omega/k = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}}$$

Gruppehastigheten:

$$v_g = d\omega/dk = \frac{g + 3\gamma k^2/\rho}{2\sqrt{gk + \gamma k^3/\rho}} = \frac{g\lambda^2 + 12\pi^2\gamma/\rho}{\sqrt{8\pi g\lambda^3 + 32\pi^3\gamma\lambda/\rho}}$$

Korte bølgelengder:

$$v \simeq \sqrt{2\pi\gamma/\rho\lambda}$$

$$v_g \simeq \sqrt{\frac{144\pi^4\gamma^2/\rho}{32\pi^3\gamma\lambda/\rho}} = \sqrt{9\pi\gamma/2\rho\lambda} = \frac{3}{2}v$$

Lange bølgelengder:

$$v \simeq \sqrt{g\lambda/2\pi}$$

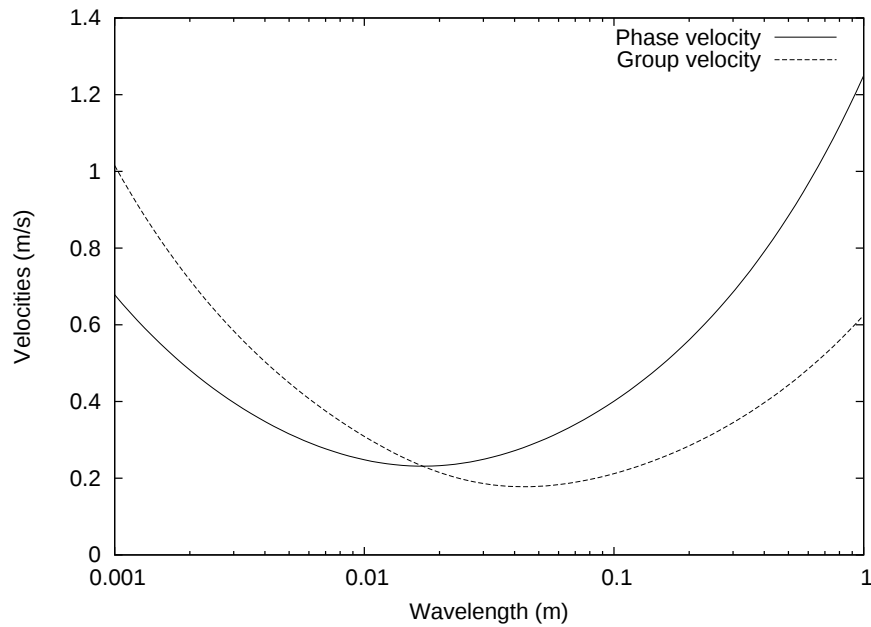
$$v_g \simeq \sqrt{g^2\lambda/8\pi g} = \sqrt{g\lambda/8\pi} = \frac{1}{2}v$$

Innsetting av tallverdier gir:

$$v = \sqrt{1.560\lambda + 4.587 \cdot 10^{-4}/\lambda}$$

$$v_g = \frac{9.8\lambda^2 + 8.646 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{246.3\lambda^3 + 0.07243\lambda}}$$

Disse uttrykkene gir v og v_g i enheten m/s med λ i enheten m.



Vi ser av uttrykkene at gruppehastigheten går mot uendelig dersom vi lar $\lambda \rightarrow 0$ eller $\lambda \rightarrow \infty$. Men det er ingen fare, for eksempel med tanke på å holde seg under lyshastigheten i vakuum, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. La oss vise dette, ved å sette $v_g = c$ i de to aktuelle grensene. Korte bølgelengder:

$$c = \sqrt{9\pi\gamma/2\rho\lambda} \Rightarrow \lambda = 9\pi\gamma/2\rho c^2 \sim 10^{-20} \text{ m}$$

som er langt under kontinuumsgrensen. Lange bølgelengder:

$$c = \sqrt{g\lambda/8\pi} \Rightarrow \lambda = 8\pi c^2/g \sim 10^{17} \text{ m}$$

og det er ikke mange sjøer der slike bølgelengder er aktuelle.

Oppgave 3

a) Vi innfører $x = kd$. Fasehastigheten er:

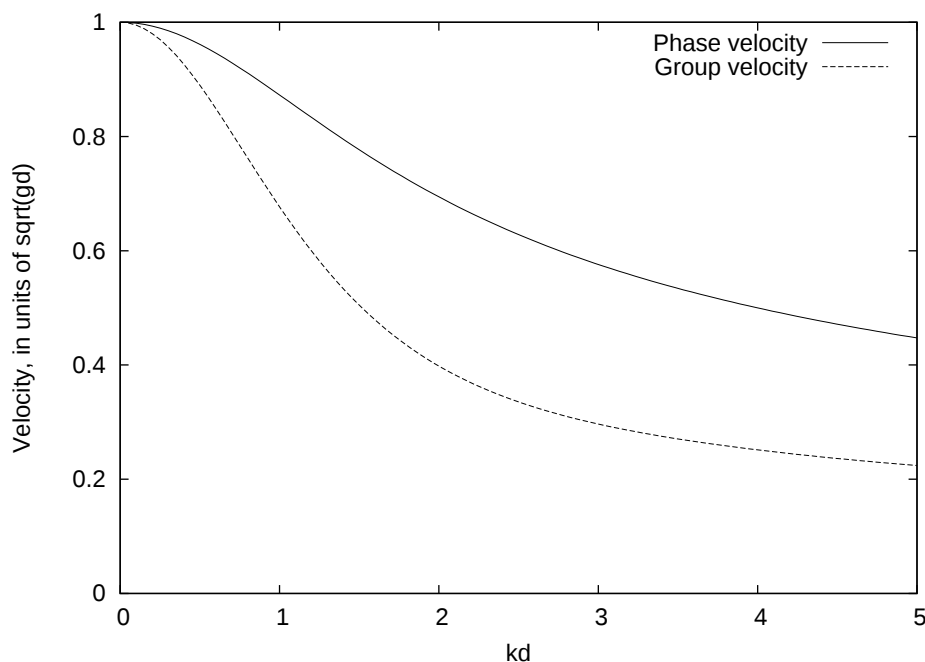
$$v = \omega/k = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kd} = \sqrt{gd} \sqrt{\frac{\tanh x}{x}}$$

Gruppehastigheten:

$$v_g = d\omega/dk = \frac{1}{2\omega} \frac{d\omega^2}{dk} = \frac{g \tanh kd + gkd/\cosh^2 kd}{2\sqrt{gk \tanh kd}}$$

Her er det flere måter å skrive v_g på, for eksempel

$$v_g = \frac{\sqrt{gd}}{2} \left(\sqrt{\frac{\sinh x}{x \cosh x}} + \sqrt{\frac{x}{\sinh x \cosh^3 x}} \right)$$



Fra figuren ser vi at forskjellen mellom v og v_g er mindre enn 5 % så lenge kd er mindre enn $1/3$, sånn omtrent. Med andre ord,

$$d < \lambda/6\pi \sim \lambda/20$$

synes som en fornuftig grense for å snakke om grunt vann.

b) På dypt vann blir dispersjonsrelasjonen for tyngdebølger

$$\omega = \sqrt{gk}$$

ettersom $\tanh kd \simeq 1$ når $kd \gg 1$. Når tyngdekrefter dominerer, blir dispersjonsrelasjonen for overflatebølger på dypt vann

$$\omega = \sqrt{gk}$$

dvs den samme.

Løsningsforslag til øving 9

Oppgave 1

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot \mathbf{a} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \\
&= \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{a} \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \\
&= -(\hat{x} k_x + \hat{y} k_y + \hat{z} k_z) \cdot \mathbf{a} \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \\
&= -\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \nabla \times \mathbf{a} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \\
&= \hat{x} \frac{\partial}{\partial y} a_z \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) - \hat{x} \frac{\partial}{\partial z} a_y \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \\
&\quad + \hat{y} \frac{\partial}{\partial z} a_x \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) - \hat{y} \frac{\partial}{\partial x} a_z \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \\
&\quad + \hat{z} \frac{\partial}{\partial x} a_y \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) - \hat{z} \frac{\partial}{\partial y} a_x \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \\
&= -[\hat{x}(k_y a_z - k_z a_y) + \hat{y}(k_z a_x - k_x a_z) + \hat{z}(k_x a_y - k_y a_x)] \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \\
&= -\mathbf{k} \times \mathbf{a} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)
\end{aligned}$$

Oppgave 2

Helt generelt vil vi ha, for en elektromagnetisk bølge som forplanter seg i retning $\hat{k}$ og som er polarisert i retning $\hat{n}$ (med $\hat{n} \perp \hat{k}$):

$$\mathbf{E} = \hat{n} E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

Alternativt kunne vi selvsagt ha brukt sinus i stedet for cosinus. Ettersom $c = \omega/k$, der $k = |\mathbf{k}|$ (slik at $\mathbf{k} = k\hat{k}$), kan vi også skrive

$$\mathbf{E} = \hat{n} E_0 \cos[\omega(t - \hat{k} \cdot \mathbf{r}/c)]$$

I kartesiske koordinater er $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$. Magnetfeltet $\mathbf{B}$ kan deretter bestemmes ved hjelp av relasjonen som vi utledet fra Faraday-Henrys lov, nemlig

$$\omega \mathbf{B} = \mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

eller

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \hat{k} \times \mathbf{E}$$

a) Forplantning i negativ z -retning betyr at $\hat{k} = -\hat{z}$. Polarisering i y -retning betyr at $\hat{n} = \hat{y}$.
Dermed:

$$\mathbf{E} = \hat{y}E_0 \cos[\omega(t + z/c)]$$

(Merk at fasen $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$ innbefatter alle mulige retninger i rommet, slik at fortegnet som angir forplantning i positiv eller negativ retning i det endimensjonale tilfellet kommer automatisk ut på riktig måte.) Det tilhørende magnetfeltet er

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{1}{c} \hat{k} \times \mathbf{E} \\ &= \frac{1}{c} (-\hat{z}) \times \hat{y} E_0 \cos[\omega(t + z/c)] \\ &= \hat{x} \frac{E_0}{c} \cos[\omega(t + z/c)]\end{aligned}$$

Kartesiske komponenter av $\mathbf{k}$ og $\hat{n}$:

$$\begin{aligned}k_x = k_y = 0 \quad , \quad k_z = -\frac{\omega}{c} \\ n_x = n_z = 0 \quad , \quad n_y = 1\end{aligned}$$

b) Forplantning i retning $(1, 1, 1)$ betyr at vi kan skrive

$$\mathbf{k} = a(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})$$

Samtidig har vi $k = \omega/c$ slik at

$$\frac{\omega}{c} = a\sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}a$$

dvs $a = \omega/\sqrt{3}c$. Dermed:

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{\sqrt{3}c} (\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})$$

og

$$\hat{k} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})$$

Polarisering i et plan parallelt med xy -planet betyr at vi kan skrive

$$\hat{n} = n_x \hat{x} + n_y \hat{y}$$

Gauss' lov brukte vi til å vise at $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$, som her betyr at $\hat{k} \cdot \hat{n} = 0$, og som gir

$$(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}) \cdot (n_x \hat{x} + n_y \hat{y}) = n_x + n_y = 0$$

dvs $n_y = -n_x$. Ettersom $|\hat{n}| = 1$, finner vi $n_x = 1/\sqrt{2}$ og $n_y = -1/\sqrt{2}$ (eller omvendt, hvis du foretrekker det). Alt i alt:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} - \hat{y}) E_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x + y + z}{\sqrt{3}c} \right) \right]$$

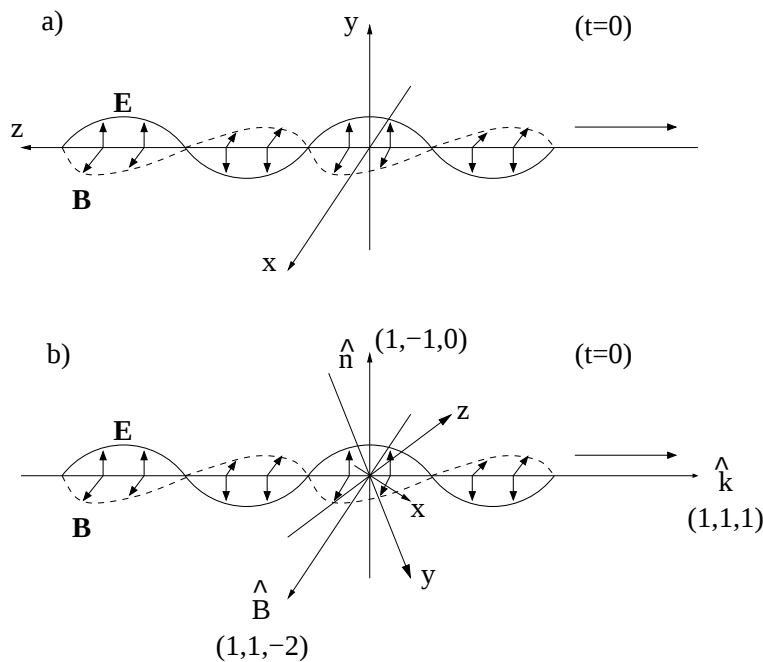
Det tilhørende magnetfeltet blir

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \\
 &= \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{3}} (\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}) \times \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} - \hat{y}) E_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x+y+z}{\sqrt{3}c} \right) \right] \\
 &= \frac{E_0}{\sqrt{6}c} (\hat{x} + \hat{y} - 2\hat{z}) \cos \left[\omega \left(t - \frac{x+y+z}{\sqrt{3}c} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Kartesiske komponenter av $\mathbf{k}$ og $\hat{n}$:

$$\begin{aligned}
 k_x &= k_y = k_z = \frac{\omega}{\sqrt{3}c} \\
 n_x &= -n_y = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_z = 0
 \end{aligned}$$

Oppgaven spurte ikke om noen figur, men vi tar den med her likevel:



Oppgave 3

Hvis flaten absorberer all strålingen fullstendig, overføres all strålingens impuls til flaten. Dermed:

$$P_{\text{rad}} = \frac{I}{c} = \frac{1300}{3 \cdot 10^8} = \frac{1.3}{3} \cdot 10^{-5} \text{ N/m}^2$$

Hvis flaten reflekterer all strålingen fullstendig, blir impulsoverføringen dobbelt så stor. Dermed:

$$P_{\text{rad}} = \frac{2I}{c} = \frac{2 \cdot 1300}{3 \cdot 10^8} = \frac{2.6}{3} \cdot 10^{-5} \text{ N/m}^2$$

Det atmosfæriske trykket er $P_{\text{atm}} = 10^5 \text{ N/m}^2$. Det betyr at strålingstrykket fra sola er forsvinnende lite i forhold:

$$\frac{P_{\text{rad}}}{P_{\text{atm}}} \sim 10^{-10}$$

Oppgave 4

Poyntings vektor:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{16\pi^2 c r^2} \cos^2[\omega(t - r/c)] \hat{\theta} \times \hat{\phi}$$

Med hensyn til retninger, kan vi tenke oss at vi befinner oss i en posisjon på et kuleskall med radius r , slik at z -aksen går gjennom sentrum av kula, fra sørpol til nordpol. Dermed peker $\hat{\theta}$ sørover og $\hat{\phi}$ østover, slik at kryssproduktet mellom disse to blir en enhetsvektor som peker radielt utover, dvs $\hat{r}$. Altså:

$$\mathbf{S} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{16\pi^2 c r^2} \cos^2[\omega(t - r/c)] \hat{r}$$

Strålingsintensiteten får vi ved å ta et tidsmiddel over en periode av Poyntings vektor. Her er det bare faktoren $\cos^2[\omega(t - r/c)]$ som avhenger av tiden, og ettersom $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, samt at middelverdien av $\cos^2 x$ og $\sin^2 x$ over en periode må være like store, har vi umiddelbart at $\langle \cos^2 x \rangle = \langle \sin^2 x \rangle = 1/2$. Følgelig:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{32\pi^2 c r^2} \hat{r}$$

(I oppgaveteksten er intensiteten $I(\mathbf{r})$ gitt som en *vektor*, hvilket ikke er riktig; intensitet er en skalar størrelse.)

Total utstrålt energi pr tidsenhet finner vi ved å legge sammen bidragene utsendt gjennom alle biter $d\mathbf{A}$ av ei hel kuleflate med radius r . Dvs:

$$\langle P \rangle = \oint \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{A}$$

Her er

$$d\mathbf{A} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}$$

se Rottmann eller elmagkurset fra i vår. Dermed:

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$

Integralet over ϕ gir rett og slett en faktor 2π . Integralet over θ kan vi sikkert finne i Rottmann. Alternativt kan vi skrive om:

$$\begin{aligned} \sin^3 \theta &= \left[\frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \right]^3 \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2i} [e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}] \\ &= -\frac{1}{4} [\sin 3\theta - 3\sin \theta] \end{aligned}$$

Og nå klarer vi å integrere:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta &= -\frac{1}{4} \int_0^\pi [\sin 3\theta - 3 \sin \theta] \, d\theta \\ &= -\frac{1}{4} \Big|_0^\pi \left[-\frac{1}{3} \cos 3\theta + 3 \cos \theta \right] \\ &= -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 3 - 3 \right] \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Total utstrålt effekt blir dermed

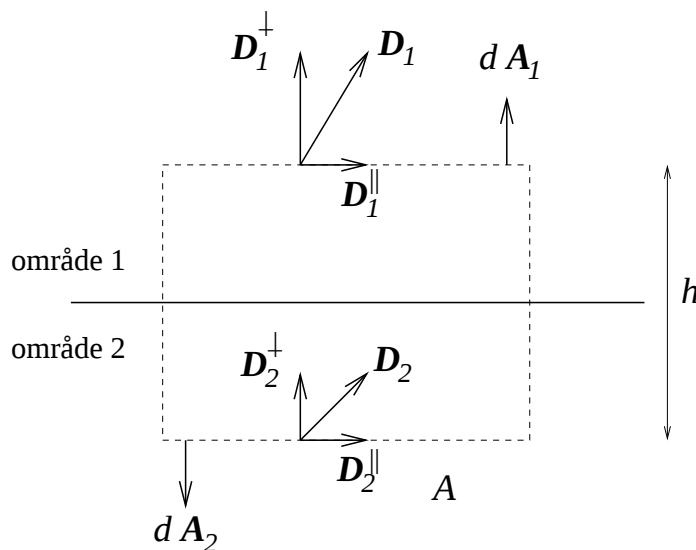
$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}$$

som vi skulle vise.

Løsningsforslag til øving 10

Oppgave 1

Vi ser først på komponenten av $\mathbf{D}$ normalt på grenseflaten. Gauss' lov sier at flateintegralet av $\mathbf{D}$ over en lukket flate skal være lik netto fri ladning innenfor den lukkede flaten. Her antar vi null fri ladning i grenseflaten.



Vi er interessert i hva som skjer idet vi krysser grenseflaten, så vi lar høyden av pilleesken, h , gå mot null. Det betyr at arealet av 4 av de 6 sideflatene på den valgte gaussflaten går mot null, så de eneste bidragene til flateintegralet i Gauss' lov kommer fra toppblokket og bunnen. Bidraget fra toppblokket blir $D_1^\perp A$ og bidraget fra bunnen blir $-D_2^\perp A$. Netto fri ladning innenfor gaussflaten er null, så vi har

$$D_1^\perp A - D_2^\perp A = 0$$

dvs

$$D_1^\perp = D_2^\perp$$

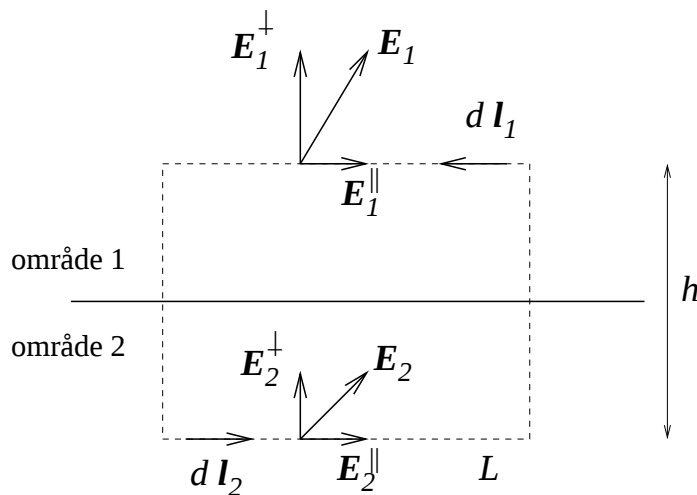
Konklusjon: Normalkomponenten av $\mathbf{D}$ er kontinuerlig når vi krysser en grenseflate uten netto fri ladning.

Tilsvarende framgangsmåte med $\mathbf{B}$ i stedet for $\mathbf{D}$ gir

$$B_1^\perp = B_2^\perp$$

Dvs: Normalkomponenten av $\mathbf{B}$ er kontinuerlig når vi krysser en grenseflate. Dette vil alltid være tilfelle i og med at det alltid står null på høyre side av likhetstegnet i Gauss' lov for magnetfeltet.

Vi ser deretter på komponenten av $\mathbf{E}$ parallelt med grenseflaten og tar utgangspunkt i Faraday-Henrys lov. Vi bruker tipset i oppgaveteksten og integrerer rundt en rektangulær kurve:



Når vi lar høyden h gå mot null, får vi null bidrag til kurveintegralet fra de to vertikale bitene av rektangelet. Bidraget fra den horisontale biten i område 2 blir $E_2^{\parallel}L$ ettersom feltet her peker samme vei som veelementet $d\mathbf{l}_2$. Bidraget fra den horisontale biten i område 1 blir $-E_1^{\parallel}L$, for her peker feltet motsatt vei av $d\mathbf{l}_1$. Totalt:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_2^{\parallel}L - E_1^{\parallel}L$$

På høyre side av likhetstegnet i Faraday-Henrys lov har vi den tidsderiverte av den magnetiske fluksen gjennom flaten som omsluttet av den lukkede kurven. Men denne fluksen er jo åpenbart lik null ettersom arealet forsvinner når vi lar h gå mot null. Dermed har vi:

$$E_2^{\parallel} = E_1^{\parallel}$$

Konklusjon: Parallellkomponenten av $\mathbf{E}$ er kontinuerlig når vi krysser en grenseflate.

Tilsvarende framgangsmåte kan vi bruke med utgangspunkt i Ampere-Maxwells lov. Med null fri strøm i grenseflaten og $h \rightarrow 0$ forsvinner alt som står på høyre side, og vi får

$$H_2^{\parallel} = H_1^{\parallel}$$

Dvs: Parallellkomponenten av $\mathbf{H}$ er kontinuerlig når vi krysser en grenseflate uten fri strøm.

Kommentar: I utledningene ovenfor har jeg valgt bestemte retninger for feltet like over og like under grenseflaten. I utgangspunktet kjenner jeg selvsagt ikke disse retningene og kunne, eksempelvis, like gjerne ha prøvd meg med helt motsatt retning på vektoren $\mathbf{E}_1$. Konklusjonene hadde imidlertid blitt de samme! Begge bidragene til kurveintegralet ville da blitt positive, slik at resultatet hadde blitt

$$E_2^{\parallel} = -E_1^{\parallel}$$

Men her betyr jo minustegnet nettopp at valget av *relativ retning* på $\mathbf{E}_1$ og $\mathbf{E}_2$ da hadde blitt "feil", dvs *gitt* en viss retning på $\mathbf{E}_2$, så må $\mathbf{E}_1$ peke i en slik retning at parallellkomponenten av $\mathbf{E}$ blir den samme på de to sidene av grenseflaten.

Samme argumentasjon gjør seg gjeldende ved betraktning av normalkomponentene.

Oppgave 2

a) Forplantning i z -retning betyr at $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$ begge ligger i xy -planet. La oss for eksempel velge $\mathbf{E}$ langs $\hat{x}$. Innkommende bølge:

$$\mathbf{E}_i = \hat{x} E_{i0} \cos(k_1 z - \omega t)$$

$$\mathbf{B}_i = \hat{y} B_{i0} \cos(k_1 z - \omega t)$$

Reflektert bølge:

$$\mathbf{E}_r = \hat{x} E_{r0} \cos(-k_1 z - \omega t)$$

$$\mathbf{B}_r = -\hat{y} B_{r0} \cos(-k_1 z - \omega t)$$

Transmittert bølge:

$$\mathbf{E}_t = \hat{x} E_{t0} \cos(k_2 z - \omega t)$$

$$\mathbf{B}_t = \hat{y} B_{t0} \cos(k_2 z - \omega t)$$

Total bølge for $z < 0$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_i + \mathbf{B}_r$$

Total bølge for $z > 0$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_t$$

Bølgetallene i de to mediene er $k_1 = \omega/v_1 = \omega n_1/c$ og $k_2 = \omega/v_2 = \omega n_2/c$. Magnetfeltamplitudene kan vi uttrykke ved amplitudene til det elektriske feltet, dvs $B_{i0} = E_{i0}/v_1$, $B_{r0} = E_{r0}/v_1$ og $B_{t0} = E_{t0}/v_2$.

Retningen på magnetfeltet er fastlagt (ved $\mathbf{k} \times \mathbf{E}$) når retningen på $\mathbf{E}$ er valgt. Legg merke til at vi her ikke har antatt noe bestemt med hensyn til fasen til $\mathbf{E}_r$ og $\mathbf{E}_t$ i forhold til $\mathbf{E}_i$: Dersom E_{r0}/E_{i0} til slutt blir en positiv størrelse, betyr det at $\mathbf{E}_r$ er *i fase* med $\mathbf{E}_i$, og dersom E_{r0}/E_{i0} til slutt blir en negativ størrelse, betyr det at $\mathbf{E}_r$ er *i motfase* med $\mathbf{E}_i$. Og tilsvarende for $\mathbf{E}_t$. Maxwells ligninger resulterte i kontinuitet av parallellkomponenten av $\mathbf{E}$ og $\mathbf{H}$ i grenseflaten mellom to medier. Vi antar lineær respons, slik at parallellkomponenten av $\mathbf{B}/\mu$ blir kontinuerlig i grenseflaten, dvs i $z = 0$. Her har feltene ingen komponent normalt på grenseflaten, slik at kontinuitet av parallellkomponenten betyr rett og slett kontinuitet av $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}/\mu$. Dette gir følgende to ligninger:

$$\begin{aligned} E_{i0} + E_{r0} &= E_{t0} \\ \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{E_{i0}}{v_1} - \frac{E_{r0}}{v_1} \right) &= \frac{1}{\mu_2} \frac{E_{t0}}{v_2} \end{aligned}$$

Her kan notasjonen forenkles noe ved å innføre $\beta \equiv \mu_1 v_1 / \mu_2 v_2$. Den siste av disse to ligningene blir da

$$E_{i0} - E_{r0} = \beta E_{t0}$$

Løsning med hensyn på de to ukjente amplitudene E_{r0} og E_{t0} gir

$$\begin{aligned} E_{r0} &= \frac{1 - \beta}{1 + \beta} E_{i0} \\ E_{t0} &= \frac{2}{1 + \beta} E_{i0} \end{aligned}$$

b) Midlere intensitet i en harmonisk elektromagnetisk bølge er

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon v E_0^2$$

der $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ er permittiviteten til mediet som bølgen forplanter seg i. Dette gir, for refleksjonskoeffisienten:

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{E_{r0}}{E_{i0}} \right)^2 = \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^2$$

For medier som i praksis kan regnes som umagnetiske, dvs $\mu_1 \simeq \mu_2 \simeq \mu_0$, har vi

$$\beta \simeq \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

slik at

$$R = \left(\frac{1 - n_2/n_1}{1 + n_2/n_1} \right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

Transmisjonskoeffisienten blir

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{\varepsilon_2 v_2 E_{t0}^2}{\varepsilon_1 v_1 E_{i0}^2}$$

Med tilnærmelsen $\mu_1 \simeq \mu_2 \simeq \mu_0$ blir $\varepsilon_2 v_2 \simeq n_2^2 c / n_2 = n_2 c$ og tilsvarende $\varepsilon_1 v_1 \simeq n_1 c$ slik at

$$T = \frac{n_2}{n_1} \frac{4}{(1 + n_2/n_1)^2} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

For grenseflaten mellom luft ($\simeq$ vakuum) og glass med $\varepsilon_r = 2.25$ har vi $n_1 = 1$ og $n_2 = \sqrt{2.25} = 1.5$, som gir

$$R = \left(\frac{0.5}{2.5} \right)^2 = 0.04$$

og dermed $T = 1 - R = 0.96$. Det virker rimelig: Nesten alt lys propagerer inn i (og gjennom) glass ved normalt innfall.

Oppgave 3

I denne oppgaven skal vi ikke regne ut hvor mye av intensiteten i innkommende bølge som blir reflektert og transmittert (refraktert), vi skal kun se på *retningen* til reflektert og transmittert bølge.

a) I grenseflaten er $\mathbf{r} = x \hat{x} + y \hat{y}$. Generelt vil de tre bølgetallsvektorene $\mathbf{k}_i$, $\mathbf{k}_r$ og $\mathbf{k}_t$ være forskjellige. Grensebetingelsene for $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$ i grenseflaten $z = 0$ resulterer i en del ligninger på formen

$$A \cos(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t) + B \cos(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t) = C \cos(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

Anta at denne er oppfylt på et bestemt sted $\mathbf{r}_1 = x_1 \hat{x} + y_1 \hat{y}$, og la oss for eksempel velge tidspunktet $t = 0$. Da er altså

$$A \cos \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_1 + B \cos \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_1 = C \cos \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}_1$$

Men denne ligningen må samtidig gjelde for alle mulige $\mathbf{r}_j$ i planet $z = 0$:

$$A \cos \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_j + B \cos \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_j = C \cos \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}_j$$

for $j = 1, 2, 3, \dots$. Det er åpenbart at dette kun er mulig dersom alle tre cosinusfaktorene er like store, uavhengig av hvilken posisjon $\mathbf{r}$ vi velger. Følgelig må vi ha

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}$$

for alle mulige posisjoner $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ i grenseflaten.

La oss nå for eksempel velge en posisjon $\mathbf{r} = (x, 0, 0)$. Det gir

$$k_{ix}x = k_{rx}x = k_{tx}x$$

dvs

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}$$

Videre kan vi velge $\mathbf{r} = (0, y, 0)$, som gir

$$k_{iy}y = k_{ry}y = k_{ty}y$$

dvs

$$k_{iy} = k_{ry} = k_{ty}$$

Konklusjon: Forplantningsretningene til innkommende, reflektert og transmittert bølge ligger i ett og samme plan, *innfallsplanet*, som også inneholder grenseflatens flatenormal (her: $\hat{z}$).

b) Uten tap av generalitet (som det så fint heter) kan vi velge akser slik at innkommende bølge har $k_{iy} = 0$. Dermed er også $k_{ry} = k_{ty} = 0$. I figuren i oppgaveteksten danner da papirplanet xz -planet, og vi ser uten videre at

$$\begin{aligned} k_{ix} &= k_i \sin \theta_i \\ k_{rx} &= k_r \sin \theta_r \\ k_{tx} &= k_t \sin \theta_t \end{aligned}$$

I oppgave *a* konkluderte vi med at disse tre må være like store. Vi har videre $k_i = k_r = \omega/v_1 = \omega n_1/c$ og $k_t = \omega/v_2 = \omega n_2/c$. Det gir

$$\theta_i = \theta_r,$$

refleksjonsloven, og

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t,$$

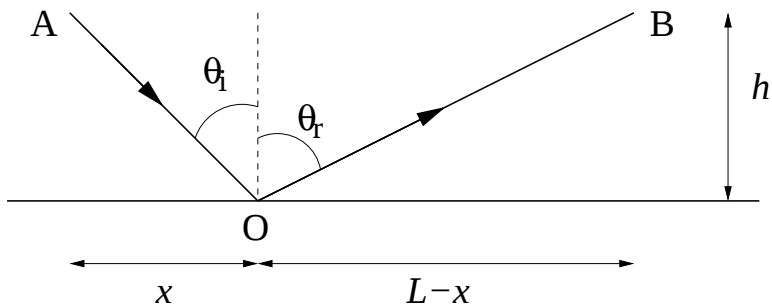
brytningsloven (Snells lov).

Kommentar: Det eneste vi har brukt i denne oppgaven er *formen* på ligningene som følger fra grenseflatebetingelsene som $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$ må oppfylle. Av den grunn må vi forvente at også andre typer harmoniske bølger (f.eks. overflatebølger eller lydbølger) vil oppføre seg på lignende vis når de støter på en grenseflate mellom to ulike medier.

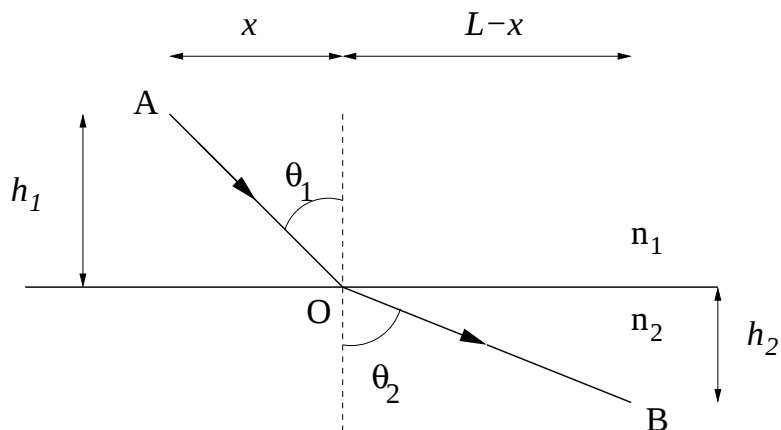
Men hvis vi er interessert i å finne ut hvordan innkommende intensitet fordeler seg på reflektert og transmittert bølge (dvs: bestemme refleksjons- og transmisjonskoeffisienter), slipper vi ikke utenom "detaljene" i grenseflatebetingelsene.

Løsningsforslag til øving 11

Oppgave 1



Figur 1. Fermats prinsipp og refleksjon



Figur 1. Fermats prinsipp og brytning

Fermats prinsipp og refleksjon:

Veistrekningen fra A via O til B er

$$s = \sqrt{x^2 + h^2} + \sqrt{(L - x)^2 + h^2}$$

Hele veien ligger i medium 1, slik at lyshastigheten ikke endrer seg. Dermed blir det ett fett om vi minimerer tidsbruken eller veilengden. Vi finner minste veistrekning ved å derivere s mhp x og sette uttrykket lik null:

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dx} &= \frac{2x}{\sqrt{x^2 + h^2}} - \frac{2(L - x)}{\sqrt{(L - x)^2 + h^2}} = 0 \\ \Rightarrow 2x\sqrt{(L - x)^2 + h^2} &= 2(L - x)\sqrt{x^2 + h^2} \\ \Rightarrow 4x^2(L^2 - 2Lx + x^2 + h^2) &= (4L^2 - 8Lx + 4x^2)(x^2 + h^2) \\ \Rightarrow 4L^2h^2 - 8Lxh^2 &= 0 \\ \Rightarrow x &= L/2 \\ \Rightarrow \theta_i &= \theta_r\end{aligned}$$

Fermats prinsipp og brytning:

Hastighet i medium 1 er v_1 og i medium 2 v_2 . Tidsforbruk fra A via O til B blir da

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(L - x)^2 + h_2^2}}{v_2}$$

Finner minimal tid ved å derivere og sette lik null:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2x}{v_1\sqrt{x^2 + h_1^2}} - \frac{2(L - x)}{v_2\sqrt{(L - x)^2 + h_2^2}} = 0$$

Vi ser fra figuren at

$$\sin \theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}}$$

mens

$$\sin \theta_2 = \frac{L - x}{\sqrt{(L - x)^2 + h_2^2}}$$

Dermed har vi uten videre

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

siden $v_1 = c/n_1$ og $v_2 = c/n_2$.

Huygens' prinsipp og refleksjon:

Både AB og A'B' er bølgefronter. Da må vi ha $AA' = BB'$. Vi ser fra figuren i oppgaveteksten at

$$\sin \theta_r = \frac{AA'}{AB'}$$

og at

$$\sin \theta_i = \frac{BB'}{AB'}$$

Men da er

$$\sin \theta_r = \sin \theta_i$$

og

$$\theta_r = \theta_i$$

Huygens' prinsipp og brytning:

Også her er både AB og A'B' bølgefronter. Da må tidsforbruket fra A til A' være like stort som tidsforbruket fra B til B', dvs

$$t_{AA'} = \frac{AA'}{v_2} = t_{BB'} = \frac{BB'}{v_1}$$

Fra figuren i oppgaveteksten ser vi at

$$\sin \theta_1 = \frac{BB'}{AB'}$$

og at

$$\sin \theta_2 = \frac{AA'}{AB'}$$

Dermed:

$$\frac{AB' \sin \theta_2}{v_2} = \frac{AB' \sin \theta_1}{v_1}$$

dvs

$$n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1$$

Oppgave 2

En frekvens 92.3 MHz tilsvarer bølglengden

$$\lambda = c/\nu = 3.25 \text{ m}$$

Vi har med andre ord $d = \lambda$. Kriteriet for konstruktiv interferens mellom radiobølgene fra de to dipolantennene blir dermed

$$\sin \theta = m$$

som bare kan være oppfylt for $m = 0$, i retning Sverresborg, og for $m = 1$, i retning Ladehameren. Fra figuren ser vi at retning mot Ila tilsvarer en vinkel $\theta \simeq 30^\circ$. Kriteriet for destruktiv interferens er nettopp

$$\sin \theta = m + 1/2 = 1/2$$

dvs $\theta = 30^\circ$. Du bør derfor ikke bosette deg i Ila.

Mulige tiltak for å gi intensitet i alle tre retninger:

- Dobbelt så stor avstand mellom antennene, dvs $d = 2\lambda$. Får da konstruktiv interferens nettopp i de tre aktuelle retningene.
- Mange antenner.
- ...

Oppgave 3

Fra figuren ser vi at $b/r = \sin \theta$, dvs $\theta = \arcsin(b/r)$. Da kan vi skrive α som en funksjon av støtparameteren b :

$$\alpha(b) = 4 \arcsin\left(\frac{b}{nr}\right) - 2 \arcsin\left(\frac{b}{r}\right)$$

Verdi av b som gir maksimal α finnes ved å derivere og sette lik null:

$$\frac{d\alpha}{db} = \frac{4/nr}{\sqrt{1 - (b/nr)^2}} - \frac{2/r}{\sqrt{1 - (b/r)^2}} = 0$$

som gir

$$\frac{4}{n^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) = 1 - \frac{b^2}{n^2 r^2}$$

og dermed

$$b = r\sqrt{(4 - n^2)/3}$$

Løsningsforslag til øving 12

Oppgave 1

Gitterkonstanten:

$$d = \frac{0.050}{2500} \text{ m} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Hovedmaksima når

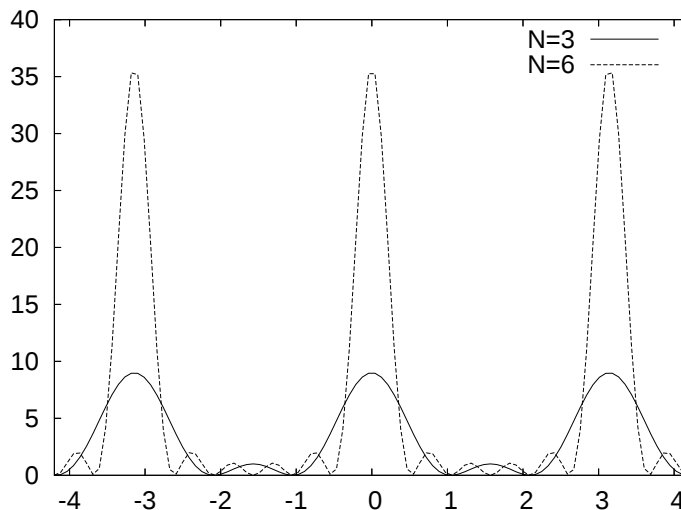
$$d \sin \theta_n = n\lambda$$

som gir

$$\lambda = d \sin \theta_1 = 2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{6.2}{\sqrt{250^2 + 6.2^2}} = 496 \text{ nm}$$

Oppgave 2

a)



b) Intensitetsfordelingen I har $N - 1$ nullpunkter mellom to hovedmaksima. Det første nullpunktet har vi når argumentet til sinusfunksjonen i telleren er lik π :

$$\frac{N\phi}{2} = \pi \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{2\pi}{N}$$

Har selvsagt også nullpunkt for $\phi = -2\pi/N$. Halvverdbredden må bli omtrent lik halvparten av intervallet mellom disse to nullpunktene, dvs

$$\Delta\phi \simeq \frac{2\pi}{N}$$

c) Vi har

$$\Delta\phi = \frac{d\phi}{d\theta_n} \Delta\theta_n$$

der

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{d\theta_n} &= \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \theta_n \\ &= \frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_n} \\ &= \frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{1 - (n\lambda/d)^2} \\ &= 2\pi \sqrt{(d/\lambda)^2 - n^2}\end{aligned}$$

Altså:

$$\Delta\theta_n = \frac{\Delta\phi}{2\pi \sqrt{(d/\lambda)^2 - n^2}} = \frac{1}{N \sqrt{(d/\lambda)^2 - n^2}}$$

d) Vi har

$$\sin \theta \simeq \frac{y}{L}$$

der y er avstanden på skjermen fra "senterlinjen" svarende til vinkelen θ , og L er avstanden fra diffraksjonsgitteret til skjermen, dvs 250 cm. På samme vis som i punkt c:

$$\Delta y = \frac{dy}{d\theta} \Delta\theta$$

der

$$\frac{dy}{d\theta} = L \cos \theta$$

Dermed:

$$\Delta y_0 = L \cos 0 \cdot \Delta\theta_0 = 250 \text{ cm} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2500 \cdot \sqrt{40.3^2}} \simeq 25 \mu\text{m}$$

Dette er halvverdibredden, slik at bredden på hele linjen blir ca 50 μm .

e) Bruker rett og slett kriteriet for hovedmaksimum:

$$\theta_n = \arcsin(n\lambda/d)$$

Innsetting gir

$$\begin{aligned}\theta_0^R = \theta_0^B &= \arcsin 0 = 0 \\ \theta_1^R &= \arcsin \frac{726 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-5}} = 2.08^\circ \\ \theta_1^B &= \arcsin \frac{496 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-5}} = 1.42^\circ \\ \theta_2^R &= \arcsin \frac{1452 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-5}} = 4.16^\circ \\ \theta_2^B &= \arcsin \frac{992 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-5}} = 2.84^\circ\end{aligned}$$

Posisjonene på skjermen får vi deretter fra $y = L \tan \theta$. (Her spiller det liten rolle om vi bruker $\tan \theta$, $\sin \theta$ eller rett og slett θ , sistnevnte tilfelle i radianer.) Utrekning gir

$$\begin{aligned}y_0^R = y_0^B &= 0 \\y_1^B &= 6.2 \\y_1^R &= 9.1 \\y_2^B &= 12.4 \\y_2^R &= 18.2\end{aligned}$$

alt i enheten cm.

Oppgave 3

Lysets bølgelengde endres fra λ i luft til $\lambda/n \simeq 3\lambda/4$ i vann. Dermed blir avstanden mellom intensitetsmaksima på observasjonsskjermen mindre. Eksempelvis vil avbøyningsvinkelen som svarer til 1. ordens maksimum endres fra $\arcsin(\lambda/d)$ i luft til $\arcsin(3\lambda/4d)$ i vann. Her er d avstanden mellom de to spaltene.

Oppgave 4

Uten plastfolie foran den ene spalten ville vi ha fått et intensitetsmaksimum på senterlinjen. (Null faseforskjell mellom delbølgene fra de to spaltene.) Ved å dekke den ene spalten med plast, har vi oppnådd en faseforskjell lik π mellom de to delbølgene, ettersom vi nå har null intensitet på senterlinjen. Dermed, med $k_1 =$ bølgetall for lyset i plasten og $k_0 =$ bølgetall for lyset i luft (og tilsvarende indekser for bølgelengder og brytningsindeks):

$$k_1 \cdot t - k_0 \cdot t = \pi$$

Vi bruker at $k = 2\pi/\lambda$ og at $\lambda_1 = \lambda_0/n_1$ og finner

$$t = \frac{\lambda_0}{2(n_1 - 1)} = \frac{630}{2 \cdot 0.8} \text{ nm} \simeq 394 \text{ nm}$$

Men vent litt! Vi vet vel egentlig ikke annet enn at faseforskjellen mellom de to delbølgene må være et odde antall ganger π , dvs $(2m + 1)\pi$, der m er lik null eller et helt tall. Vi har dermed flere muligheter: $t = (2m + 1) \cdot 394 \text{ nm}$.

Oppgave 5

Opplosningsevnen vil være bestemt av forholdet λ/D . Dette er uansett ingen skarpt definert grense, så det er ikke mye vits i å bruke $\arcsin(1.22\lambda/D)$. Vi finner:

a) For øyet mhp synlig lys: Anta f.eks. $D = 5 \text{ mm}$ og $\lambda = 500 \text{ nm}$. Det gir at vinkelavstanden mellom de to objektene må være minst 0.0001 radianer eller ca 0.006 grader. (I praksis vil nok

ofte atmosfæriske forstyrrelser føre til en betydelig større verdi.)

b) For optisk teleskop med diameter 8.3 m: $5 \cdot 10^{-7} / 8.3 \simeq 6 \cdot 10^{-8}$ radianer eller ca 3 mikrograder.

c) For et radioteleskop med diameter 305 m og radiobølger med bølgelengde 21 cm: $0.21 / 305 \simeq 7 \cdot 10^{-4}$ radianer eller ca 0.04 grader.

En innser raskt fordelene ved å observere i den kortbølgede delen av spektret. Problemet med å gå til enda kortere bølgelengder er at denne strålingen i stor grad absorberes i atmosfæren. Alternativet da er å sette teleskopet på en satellitt og plassere den utenfor jordas atmosfære.

Oppgave 6

Intensitetsfordelingen ved diffraksjon fra en enkelt spalte med bredde a er gitt ved

$$I = \hat{I} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

der $\beta = \pi a \sin \theta / \lambda$. Dersom vi dobler spaltebredden, vil β bli dobbelt så stor for en gitt avbøyningsvinkel θ . Første nullpunkt kommer ved halvparten så stor avbøyningsvinkel, så vinkelpredningen blir med andre ord halvert. Under utledning av denne intensitetsfordelingen antok vi at spalten med endelig bredde a kunne deles opp i et stort antall tynne spalter med veldig liten bredde a/N (slik at hver tynne spalte kunne betraktes som en ideell "Huygens-kilde" for sylindrebølger). Med I_0 lik intensiteten fra *en* slik tynn spalte fant vi videre at $\hat{I} = I_0 \cdot N^2$ = maksimal intensitet, rett framover, ved $\theta = 0$. En dobling av spaltebredden må gi dobbelt så mange slike ideelle "Huygens-kilder", og dermed 4 ganger så stor $\hat{I}$. Men ettersom bredden på intensitetsfordelingen samtidig blir halvert, blir total energi som treffer skjermen bare 2 ganger større. Og det passer jo bra, ettersom dobling av spaltebredden må resultere i at vi slipper dobbelt så mye energi gjennom.

Løsningsforslag til øving 13

Oppgave 1

a) I følge Galileo: ($\bar{S} = \bar{S}_{iv}$, $S = \text{Sam}$, $T = \text{Toget}$)

$$v_{\bar{S}S}^G = v_{\bar{S}T} + v_{TS}$$

I følge Einstein:

$$v_{\bar{S}S}^E = \frac{v_{\bar{S}T} + v_{TS}}{1 + v_{\bar{S}T}v_{TS}/c^2}$$

Dermed:

$$\frac{v_{\bar{S}S}^G - v_{\bar{S}S}^E}{v_{\bar{S}S}^G} = v_{\bar{S}T}v_{TS}/c^2 = 3.4 \cdot 10^{-14} \%$$

Her har vi brukt at

$$\frac{1}{1 + v_{\bar{S}T}v_{TS}/c^2} \simeq 1 - v_{\bar{S}T}v_{TS}/c^2$$

når hastighetene $v_{\bar{S}T}$ og v_{TS} er små i forhold til c , og det er jo tilfelle her. Med andre ord: Ingen stor feil å bruke galileisk relativitet her.

b)

$$v_{\bar{S}S} = \frac{c/2 + 3c/4}{1 + (1/2) \cdot (3/4)} = \frac{10c}{11}$$

Legg merke til at $\bar{S}$ ivs hastighet i forhold til Sam er mindre enn c . I følge Galileo ville den ha vært $5c/4$.

c) Vi innfører dimensjonsløse størrelser $\beta = v_{\bar{S}S}/c$, $\beta_1 = v_{\bar{S}T}/c$ og $\beta_2 = v_{TS}/c$. Oppgaven blir da å vise at hvis både $\beta_1 < 1$ og $\beta_2 < 1$, så er også $\beta < 1$. Alternativt kan vi vise at $\beta^2 < 1$:

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2} \right)^2 \\ &= \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2}{1 + \beta_1^2\beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2} \\ &= \frac{1 + \beta_1^2\beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2}{1 + \beta_1^2\beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2} - \frac{1 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_1^2\beta_2^2}{1 + \beta_1^2\beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2} \\ &= 1 - \frac{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)}{(1 + \beta_1\beta_2)^2} \\ &< 1 \end{aligned}$$

Oppgave 2

Vi kjenner $\bar{S}$'s hastighet i forhold til Sam:

$$v_{\bar{S}S} = \frac{5c}{8}$$

Kulas hastighet i forhold til Sam:

$$v_{KS} = \frac{v_{KA} + v_{AS}}{1 + v_{KA}v_{AS}/c^2} = \frac{8c}{13}$$

(Her er hele tiden v_{ij} hastigheten til i i forhold til j , og A , K og S står for Arne, Kula og Sam.)
Altså har kula litt mindre hastighet enn $\bar{S}$ iv, slik at $\bar{S}$ iv overlever.

Vi kan bruke Einsteins regel for addisjon av hastigheter til å bestemme alle fires hastigheter i forhold til hverandre. Oppsummert i en tabell (med alle hastigheter i enheten c):

hastigheten til... → ...i forhold til ↓	S	A	K	$\bar{S}$
S	0	3/8	8/13	5/8
A	-3/8	0	5/16	16/49
K	-8/13	-5/16	0	1/64
$\bar{S}$	-5/8	-16/49	-1/64	0

Vi ser at $\bar{S}$ iv har større hastighet enn kula, uansett hvem vi spør.

Oppgave 3

Avstanden fra deg til klokke nr 201 er $200 \cdot 300000$ km. Lyset bruker 200 sekunder på denne strekningen. Følgelig *ser* du at klokke nr 201 viser 11:56:40 når klokke nr 1 viser 12:00:00.

Men du *observerer* at klokke nr 201 er 12:00:00. Å observere betyr det samme som å *måle*, og du vet at du må korrigere for at lyset har reist $200 \cdot 300000$ km for å nå fram til øyet ditt.

Oppgave 4

Myonets totale energi er $E_\mu = \gamma mc^2 = 2 \cdot 10^9$ eV, mens dets hvileenergi er $E_\mu^0 = mc^2 = 105.7 \cdot 10^6$ eV. Det betyr at lorentzfaktoren er

$$\gamma = \frac{E_\mu}{E_\mu^0} = 18.92$$

Myonets hastighet er dermed

$$v = c\sqrt{1 - 1/\gamma^2} = 0.9986 c$$

Den oppgitte levetiden på $2.2 \mu s$ gjelder for myoner med lave hastigheter. Observert fra jorda vil dermed et myon med hastighet $0.9986 c$ ha en levetid

$$\Delta t = \gamma \Delta \bar{t} = 18.92 \cdot 2.2 \mu s = 41.6 \mu s$$

På denne tiden reiser myonet en avstand

$$\Delta x = v\Delta t = 12.5 \text{ km}$$

som er av samme størrelsesorden som avstanden fra jorda og opp til de øvre deler av atmosfæren, der myonet ble dannet.

Oppgave 5

Vi starter med å skrive $\mathbf{u}$ og $\bar{\mathbf{u}}$ på komponentform:

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

$$\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z) = \left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}, \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}}, \frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} \right)$$

Deretter bruker vi lorentztransformasjonene,

$$d\bar{x} = \gamma(dx - vdt)$$

$$d\bar{y} = dy$$

$$d\bar{z} = dz$$

$$d\bar{t} = \gamma(dt - vdx/c^2)$$

direkte og finner

$$\begin{aligned}\bar{u}_x &= \frac{dx - vdt}{dt - vdx/c^2} = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2} \\ \bar{u}_y &= \frac{dy}{\gamma(dt - vdx/c^2)} = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v/c^2)} \\ \bar{u}_z &= \frac{dz}{\gamma(dt - vdx/c^2)} = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x v/c^2)}\end{aligned}$$

Oppgave 6

$\bar{\text{Siv}}$ reiser i alt en avstand $\Delta x = 24$ lysår. Hastigheten hennes er $v = 0.98c$. Hun må dermed ha brukt en tid $\Delta t = \Delta x/v = 24.490$ år. Sam er med andre ord ca 42 og et halvt år når $\bar{\text{Siv}}$ kommer hjem.

På grunn av tidsdilatasjon går $\bar{\text{Sivs}}$ klokke betydelig langsommere (både den klokka hun har på armen og hennes biologiske klokke). Hun måler et tidsforbruk $\Delta \bar{t} = \Delta t/\gamma = 4.873$ år. $\bar{\text{Siv}}$ er dermed snaut 23 år når hun kommer hjem.

”Paradokset”: Vil det ikke fra $\bar{\text{Sivs}}$ synsvinkel være omvendt? Dvs, slik at det er Sam som reiser med hastighet $0.98c$ mens $\bar{\text{Siv}}$ forholder seg i ro? I såfall burde $\bar{\text{Siv}}$ konkludere med at det er Sam som er den yngste av de to når hun kommer hjem.

Kortforklaringen på at dette *ikke* er tilfelle: $\bar{S}$ iv er ikke i ett og samme inertialsystem under hele reisen. Hun må gjennomgå en akselerasjon i det hun snur. Sam, derimot, er hele tiden i samme inertialsystem, så vi må stole på ham. Altså *er* Sam eldre enn $\bar{S}$ iv.

Problemet kan analyseres noe mer inngående: Vi innser raskt at vi her har med *tre* inertialsystem å gjøre: S , der Sam hele tiden er i ro; $\bar{S}$, der romskipet og $\bar{S}$ iv er i ro på utreisen; $\hat{S}$, der romskipet og $\bar{S}$ iv er i ro på hjemreisen. Ulike hendelser, og dermed ulike lengder og tidsintervaller, i de ulike inertialsystemene vil være relatert via lorentztransformasjonene (LT). Vi velger hendelsen *avreise* (A) ved tidspunktet $t_A = \bar{t}_A = \hat{t}_A = 0$ og i posisjonen $x_A = \bar{x}_A = \hat{x}_A = 0$. Hendelsen A definerer med andre ord et felles origo for de tre inertialsystemene. Positiv retning i rommet velges fra jorda og mot Epsilon Indi (EI). Det betyr at aktuelle relative hastigheter er

$$\begin{aligned} v_{\bar{S}S} &= v = 0.98c \\ v_{\hat{S}S} &= -v = -0.98c \\ v_{\bar{S}\hat{S}} &= \frac{v_{\bar{S}S} + v_{S\hat{S}}}{1 + v_{\bar{S}S}v_{S\hat{S}}/c^2} = \frac{v + v}{1 + v^2/c^2} \simeq 0.9998c \end{aligned}$$

Vi trenger her bare å bruke de to første, som har samme lorentzfaktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 5.025$$

Neste hendelse (B) er at $\bar{S}$ iv ankommer EI. I Sams verden S er da $x_B = 12$ (lysår) og $t_B = x_B/v = 12/0.98 = 12.245$ (år). LT gir oss "koordinatene" for hendelse B i $\bar{S}$ og $\hat{S}$:

$$\begin{aligned} \bar{x}_B &= \gamma(x_B - vt_B) = 0 \\ \bar{t}_B &= \gamma(t_B - vx_B/c^2) = \gamma \frac{x_B}{v} (1 - v^2/c^2) = \frac{x_B}{\gamma v} = \frac{12}{5.025 \cdot 0.98} = 2.437 \\ \hat{x}_B &= \gamma(x_B + vt_B) = 2\gamma x_B = 2 \cdot 5.025 \cdot 12 = 120.605 \\ \hat{t}_B &= \gamma(t_B + vx_B/c^2) = \gamma t_B (1 + v^2/c^2) = 120.625 \end{aligned}$$

Dette betyr at $\bar{S}$ ivs klokke viser 2.437 umiddelbart før hun snur. Det at hun snur innebærer at hun hopper fra inertialsystemet $\bar{S}$ til $\hat{S}$. Riktig klokke i $\hat{S}$ viser 120.625. Følgelig må $\bar{S}$ iv stille klokka si 118.188 år fram hvis hun ønsker at klokka hennes skal vise det samme som alle andre klokker i $\hat{S}$. Dette betyr selvsagt ikke at $\bar{S}$ iv plutselig har blitt 118.188 år eldre. Hun er fortsatt $18 + 2.437 = 20.437$ år gammel.

Neste hendelse (C) er at $\bar{S}$ iv kommer hjem. I Sams verden S har denne hendelsen koordinatene $x_C = 0$ og $t_C = 2t_B = 24.490$. LT gir oss igjen de tilsvarende koordinatene i $\bar{S}$ og $\hat{S}$:

$$\begin{aligned} \bar{x}_C &= \gamma(x_C - vt_C) = -120.601 \\ \bar{t}_C &= \gamma(t_C - vx_C/c^2) = \gamma t_C = 123.062 \\ \hat{x}_C &= \gamma(x_C + vt_C) = \gamma vt_C = 120.601 \\ \hat{t}_C &= \gamma(t_C + vx_C/c^2) = \gamma t_C = 123.062 \end{aligned}$$

Her må vi holde tunga rett i munnen: Turen hjem, målt med $\bar{S}$ ivs klokke, varte $\hat{t}_C - \hat{t}_B = 123.062 - 120.625 = 2.437$ år (enten hun stilte klokka eller ikke). Ikke overraskende tok det like lang tid begge veier. $\bar{S}$ iv konkluderer med at hun har blitt 4.874 år eldre siden avreise (hendelse

A). Altså er Sam og $\bar{\text{Siv}}$ enige om $\bar{\text{Siv}}$ s alder, 22.874 år, ved hjemkomst (hendelse C).

Det gjenstår da kun å kontrollere at de også er enige om Sams alder ved hjemkomst. $\bar{\text{Siv}}$ må nå forholde seg til inertialsystemene $\hat{S}$ og S . Hele reisen, fra hendelse A til hendelse C tok en tid $\hat{t}_C - \hat{t}_A = 123.062$ år. Sett fra $\hat{S}$ har inertialsystemet S hele tiden hatt konstant hastighet $v = 0.98c$. En observatør i $\hat{S}$ (og det er jo nettopp det $\bar{\text{Siv}}$ er ved hjemkomst!) vil da, med rette, hevde at en tidsmåling i S mellom hendelsene A og C må vise

$$\frac{\hat{t}_C - \hat{t}_A}{\gamma} = \frac{123.062}{5.025} = 24.490$$

Og det er nettopp hva Sam selv hevder han har målt, så Sam og $\bar{\text{Siv}}$ er også enige om Sams alder ved hjemkomst, 42.490 år.