TFY4160/FY1002 Bølgefysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2007.

Løsningsforslag til øving 7

Oppgave 1

a) I forelesningene har vi utledet sammenhengene mellom amplituden A til innkommende bølge og amplitudene B og C til henholdsvis reflektert og transmittert bølge:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{\mu_2}-\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2}+\sqrt{\mu_1}}\,A \\ C &= \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2}+\sqrt{\mu_1}}\,A \end{aligned}$$

Her er $\mu_2 = 90$ g/m masse pr lengdeenhet på den tunge delen av strengen, $\mu_1 = 10$ g/m er masse pr lengdeenhet på den lette delen av strengen og $A = 5$ mm. Innsetting av disse tallverdiene gir $B = 2A/4 = 2.5$ mm og $C = 2A/4 = 2.5$ mm.

b) Fra forelesningene har vi følgende uttrykk for midlere effekt transportert med den innkommende bølgen (også oppgitt i oppgaveteksten):

$$\begin{aligned} \overline{P}_i &= \frac{1}{2}v\mu_1\omega^2A^2 \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{S/\mu_1}\mu_1\omega^2A^2 \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{S\mu_1}\omega^2A^2 \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{4\cdot 10\cdot 10^{-3}}\cdot(10\pi)^2\cdot(5\cdot 10^{-3})^2 \\ &= 2.5\ \text{mJ/s} \end{aligned}$$

Andel av effekten som reflekteres er gitt ved refleksjonskoeffisienten $R = \overline{P}_r/\overline{P}_i$:

$$R = \left(\frac{\sqrt{\mu_2}-\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2}+\sqrt{\mu_1}}\right)^2 = 0.25 = 25\%$$

Resten blir transmittert:

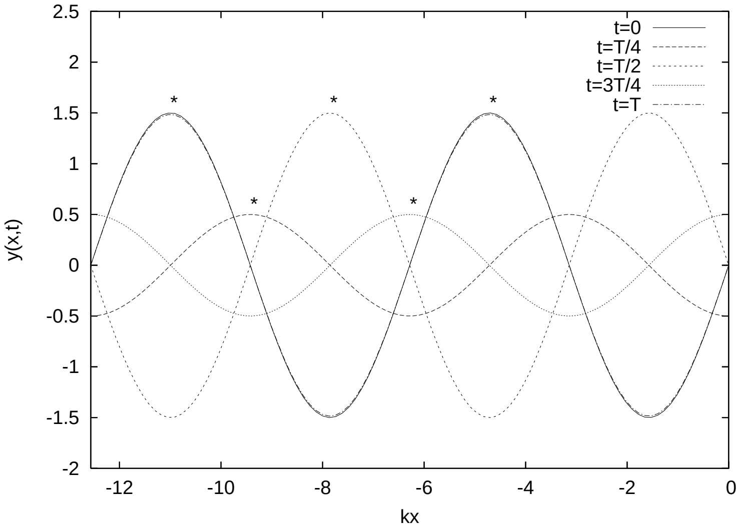
$$T = 1 - R = 0.75 = 75\%$$

c) Utsvinget til venstre for skjøten i $x = 0$ er:

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_i(x,t) + y_r(x,t) \\ &= A\left(\sin(kx-\omega t) + \frac{1}{2}\sin(kx+\omega t)\right) \\ &= A\left(\sin kx\cos\omega t - \cos kx\sin\omega t + \frac{1}{2}\sin kx\cos\omega t + \frac{1}{2}\cos kx\sin\omega t\right) \\ &= A\left(\frac{3}{2}\sin kx\cos\omega t - \frac{1}{2}\cos kx\sin\omega t\right) \end{aligned}$$

som er en sum av to stående bølger.

d) Nei, vi kan *ikke* konkludere med at bølgen $y(x,t)$ på den lette delen av strengen ikke transporterer noen netto energi. Riktignok er den en sum av to stående bølger, men på samme måte som en sum av to vandrende bølger sammen kan bli en stående bølge som *ikke* transporterer netto energi, kan en sum av to stående bølger til sammen være en vandrende bølge som transporterer netto energi. Og det er jo tilfelle her. Figuren nedenfor viser øyeblikksbilder av $y(x,t)$ i området mellom $kx = -4\pi$ og $kx = 0$. Stjernene antyder hvordan en bestemt bølgetopp propagerer mot høyre, med varierende amplitude.



e) Uansett skjøtens posisjon kan vi for det første velge $\phi_i = 0$ (for eksempel). Fysikken kan ikke avhenge av hvor vi legger skjøten. Med andre ord: Dersom vi hadde en bestemt sammenheng mellom fasene til y_i og y_r med skjøten i $x = 0$, må vi fortsatt ha den samme bestemte sammenhengen med skjøten i $x = a$. Det oppnår vi ved å velge $\phi_r = -2ka$. Da blir nemlig

$$y_i(a,t) = A\sin(ka - \omega t) = -A\sin(\omega t - ka)$$

og

$$y_r(a,t) = B\sin(ka + \omega t - 2ka) = B\sin(\omega t - ka)$$

dvs

$$y_r(a,t) = -\frac{B}{A}\, y_i(a,t)$$

den samme sammenhengen mellom y_r og y_i som vi hadde i $x = 0$ med skjøten i $x = 0$, dvs enten y_r og y_i i fase (motsatt fortegn på B og A) eller y_r og y_i i motfase (samme fortegn på B og A) i skjøten. Mer generelt må vi, med skjøten i $x = a$, velge fasekonstanter slik at

$$\phi_r + \phi_i = -2ka$$

Oppgave 2

a) B
Grunntonen på en svingende streng som er festet i begge ender har bølgelengde $\lambda = 2L$, der L er strengens lengde. En bestemt frekvens ν oppnås da ved å sørge for at bølgehastigheten blir

$$v = \lambda\nu = 2\nu L$$

Samtidig vet vi at v er bestemt ved strammingen S og strengens masse pr lengdeenhet μ:

$$v = \sqrt{S/\mu}$$

Strammingen må derfor være

$$\begin{aligned} S &= \mu v^2 \\ &= \frac{m}{L} \cdot 4\nu^2 L^2 \\ &= 4m\nu^2 L \\ &= 4 \cdot 0.0002 \cdot 440^2 \cdot 0.370 \\ &\simeq 57.3 \text{ N} \end{aligned}$$

b) A
Stående lydbølger i et tynt luftfylt rør som er åpent i begge ender, har knutepunkt, $\Delta p = 0$, for trykkbølgen i begge ender, dvs i $x = 0$ og i $x = L$, der $L = 0.5$ m i dette tilfellet. Utsvingsbølgen ξ har dermed maksimal amplitude (buk) i begge ender. Laveste resonansfrekvens (grunntonen) må dermed ha bølgelengde $\lambda = 2L = 1$ m. Med lydhastighet $v = 340$ m/s blir laveste resonansfrekvens

$$\nu = v/\lambda = 340 \text{ Hz}$$

c) C
Rørets resonansfrekvenser er $\nu_n = n \cdot 340$ Hz, med $n = 1, 2, ...$ Resonans nr n har n knutepunkter for den stående utsvingsbølgen ξ. Altså 4 knutepunkter for moden med frekvens 1360 Hz.

d) D
Vi kan tenke på dette systemet som tvungne svingninger: Den vibrerende gitarstrengen virker som en ekstern harmonisk kraft på luftmolekylene omkring, som dermed tvinges til å svinge fram og tilbake med samme frekvens som den vibrerende strengen. Bølgehastigheten er bestemt ved mediets elastiske egenskaper og mediets massetetthet og er generelt forskjellig for strengen og lufta. Dermed blir også bølgelengden $\lambda = v/\nu$ generelt forskjellig. Når det gjelder amplituden, vil det nok være en sammenheng mellom disse, for et kraftigere anslag på strengen resulterer jo i sterkere lyd. Men som vi har sett i en tidligere øving, vil utsvingsamplituden til luftmolekylene typisk være av størrelsesorden noen få nanometer (med lydintensitet godt under smertegrensen), som åpenbart er mye mindre enn typiske amplituder på en vibrerende gitarstreng.