TFY4160/FY1002 Bølgefysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2007.

Løsningsforslag til øving 8

Oppgave 1

a) Vi kan neglisjere k^4-leddet dersom

$$\frac{S}{\mu} \gg \frac{YA^2}{4\pi\mu}k^2$$

dvs

$$\frac{4\pi^2}{k^2} \gg \frac{\pi Y A^2}{S}$$

dvs

$$\lambda \gg A\sqrt{\frac{\pi Y}{S}}$$

Innsetting av oppgitte tallverdier gir betingelsen $\lambda \gg 3.9$ cm. For grunntonen, med bølgelengden lik to ganger strengens lengde, vil dette typisk være godt oppfylt på de fleste instrumenter. For høyere harmoniske vil k^4-leddet etter hvert gjøre seg mer gjeldende.

b) La oss starte med å regne ut v og v_g som funksjoner av bølgetallet k:

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\beta + \alpha k^2}$$

$$\begin{aligned}
v_g &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(vk)}{dk} = v + k\frac{dv}{dk} \\
&= \sqrt{\beta + \alpha k^2} + k\frac{\alpha k}{\sqrt{\beta + \alpha k^2}} \\
&= \frac{\beta + 2\alpha k^2}{\sqrt{\beta + \alpha k^2}} \\
&= v\,\frac{\beta + 2\alpha k^2}{\beta + \alpha k^2}
\end{aligned}$$

Her har vi innført $\beta = S/\mu$ og $\alpha = YA^2/4\pi\mu$, og vi har skrevet v_g på et par forskjellige måter.

For å finne v og v_g som funksjoner av frekvensen ν, må vi uttrykke k^2 ved ν. Vi må løse ligningen

$$\alpha k^4 + \beta k^2 - 4\pi^2\nu^2 = 0$$

med hensyn på k^2. Det gir

$$k^2 = \frac{\beta}{2\alpha}\left(\sqrt{1 + \frac{16\pi^2\alpha}{\beta^2}\nu^2} - 1\right)$$

og dermed

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{16\pi^2\alpha}{\beta^2}\nu^2} + 1\right)}$$

$$v_g = 2v \frac{\sqrt{1+\frac{16\pi^2\alpha}{\beta^2}\nu^2}}{\sqrt{1+\frac{16\pi^2\alpha}{\beta^2}\nu^2}+1}$$

Vi ser uten videre at i grensen $\nu \to 0$ får vi

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{2}\cdot 2} = \sqrt{\beta} = \sqrt{S/\mu}$$

og

$$v_g = v = \sqrt{S/\mu}$$

som ventet. For riktig høye frekvenser vil leddet som inneholder ν^2 dominere i forhold til 1, og vi får

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{2}\cdot\frac{4\pi\sqrt{\alpha}\nu}{\beta}} = \sqrt{2\pi\sqrt{\alpha}\nu}$$

og

$$v_g = 2v = \sqrt{8\pi\sqrt{\alpha}\nu}$$

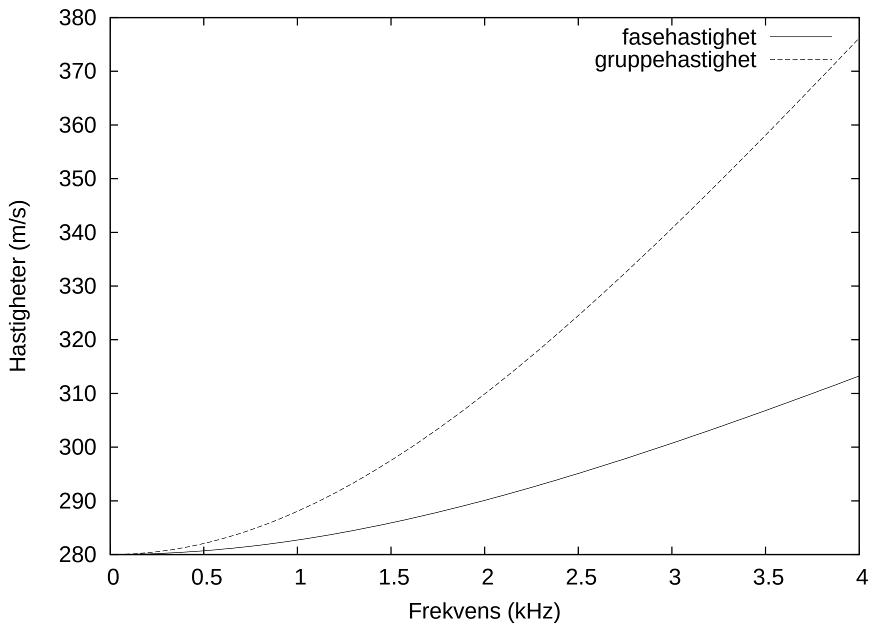
Innsetting av tallverdier gir $\alpha = 3.0625$, $\beta = 78411.5$ og $16\pi^2\alpha/\beta^2 = 7.866\cdot 10^{-8}$, sistnevnte da med enheten s^2, ettersom den multiplisert med ν^2 gir en dimensjonsløs størrelse. Dermed:

$$v = 198\left(\sqrt{1+7.866\cdot 10^{-8}\nu^2}+1\right)^{1/2}$$

dvs i enheten m/s når verdier for frekvensen ν settes inn med enhet Hz. Tilsvarende, for gruppehastigheten:

$$v_g = 396\frac{\sqrt{1+7.866\cdot 10^{-8}\nu^2}}{\left(\sqrt{1+7.866\cdot 10^{-8}\nu^2}+1\right)^{1/2}}$$

Innsetting av $\nu = 0, 1, 2, 3$ og 4 kHz gir verdiene 280, 283, 290, 301 og 313 for fasehastigheten v, og verdiene 280, 288, 310, 341 og 376 for gruppehastigheten v_g. Det skulle være tilstrekkelig for å skissere funksjonene $v(\nu)$ og $v_g(\nu)$.



Oppgave 2

Fasehastigheten:

$$v = \omega/k = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}}$$

Gruppehastigheten:

$$v_g = d\omega/dk = \frac{g + 3\gamma k^2/\rho}{2\sqrt{gk + \gamma k^3/\rho}} = \frac{g\lambda^2 + 12\pi^2\gamma/\rho}{\sqrt{8\pi g\lambda^3 + 32\pi^3\gamma\lambda/\rho}}$$

Korte bølgelengder:

$$v \simeq \sqrt{2\pi\gamma/\rho\lambda}$$

$$v_g \simeq \sqrt{\frac{144\pi^4\gamma^2/\rho}{32\pi^3\gamma\lambda/\rho}} = \sqrt{9\pi\gamma/2\rho\lambda} = \frac{3}{2}v$$

Lange bølgelengder:

$$v \simeq \sqrt{g\lambda/2\pi}$$

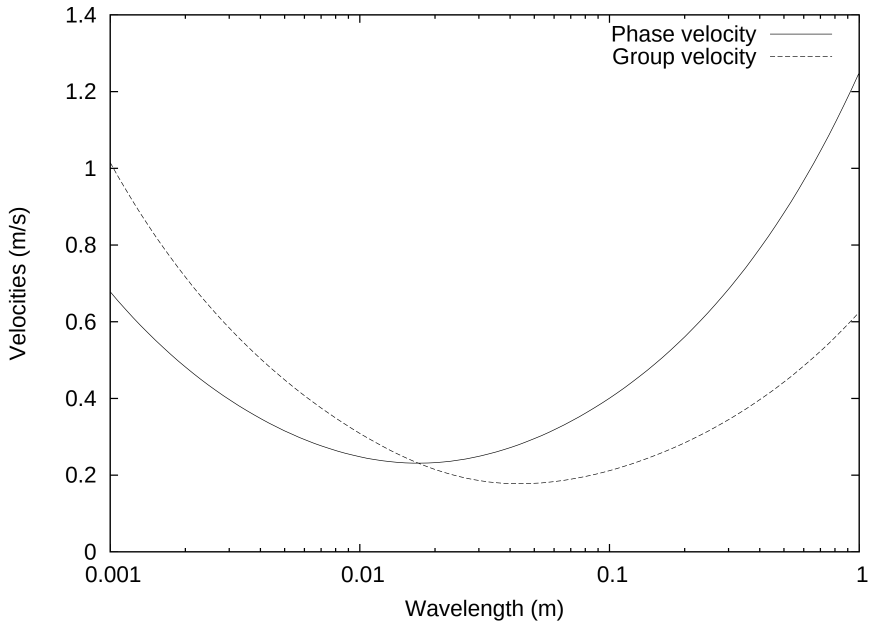
$$v_g \simeq \sqrt{g^2\lambda/8\pi g} = \sqrt{g\lambda/8\pi} = \frac{1}{2}v$$

Innsetting av tallverdier gir:

$$v = \sqrt{1.560\lambda + 4.587 \cdot 10^{-4}/\lambda}$$

$$v_g = \frac{9.8\lambda^2 + 8.646 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{246.3\lambda^3 + 0.07243\lambda}}$$

Disse uttrykkene gir v og v_g i enheten m/s med λ i enheten m.



Vi ser av uttrykkene at gruppehastigheten går mot uendelig dersom vi lar $\lambda \to 0$ eller $\lambda \to \infty$. Men det er ingen fare, for eksempel med tanke på å holde seg under lyshastigheten i vakuum, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. La oss vise dette, ved å sette $v_g = c$ i de to aktuelle grensene. Korte bølgelengder:

$$c = \sqrt{9\pi\gamma/2\rho\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 9\pi\gamma/2\rho c^2 \sim 10^{-20} \text{ m}$$

som er langt under kontinuumsgrensen. Lange bølgelengder:

$$c = \sqrt{g\lambda/8\pi} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 8\pi c^2/g \sim 10^{17} \text{ m}$$

og det er ikke mange sjøer der slike bølgelengder er aktuelle.

Oppgave 3

a) Vi innfører $x = kd$. Fasehastigheten er:

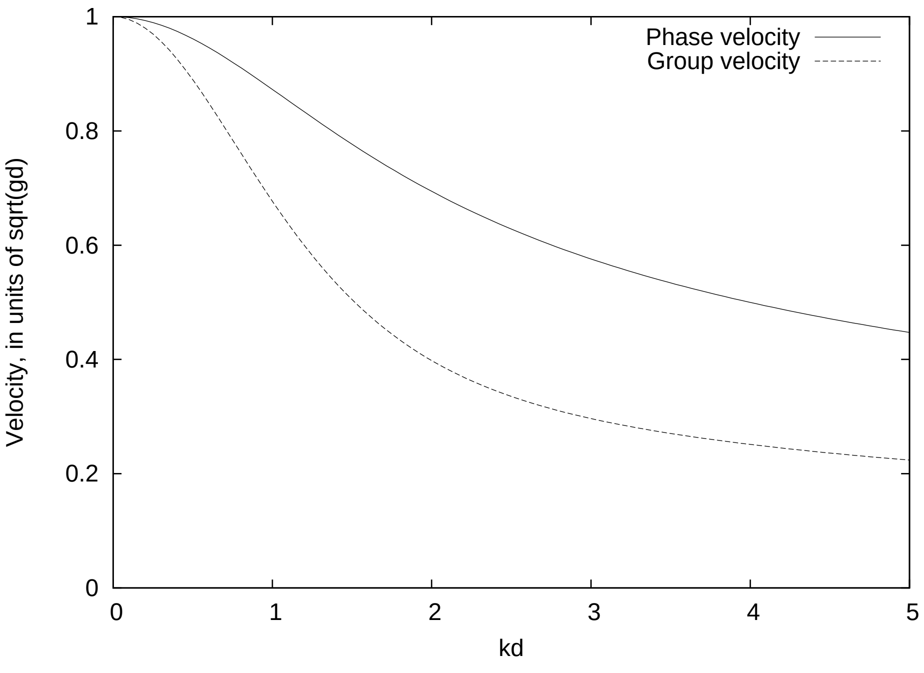
$$v = \omega/k = \sqrt{\frac{g}{k}\tanh kd} = \sqrt{gd}\sqrt{\frac{\tanh x}{x}}$$

Gruppehastigheten:

$$v_g = d\omega/dk = \frac{1}{2\omega}\frac{d\omega^2}{dk} = \frac{g\tanh kd + gkd/\cosh^2 kd}{2\sqrt{gk\tanh kd}}$$

Her er det flere måter å skrive v_g på, for eksempel

$$v_g = \frac{\sqrt{gd}}{2}\left(\sqrt{\frac{\sinh x}{x\cosh x}} + \sqrt{\frac{x}{\sinh x\cosh^3 x}}\right)$$



Fra figuren ser vi at forskjellen mellom v og v_g er mindre enn 5 % så lenge kd er mindre enn 1/3, sånn omtrent. Med andre ord,

$$d < \lambda/6\pi \sim \lambda/20$$

synes som en fornuftig grense for å snakke om grunt vann.

b) På dypt vann blir dispersjonsrelasjonen for tyngdebølger

$$\omega = \sqrt{gk}$$

ettersom $\tanh kd \simeq 1$ når $kd \gg 1$. Når tyngdekrefter dominerer, blir dispersjonsrelasjonen for overflatebølger på dypt vann

$$\omega = \sqrt{gk}$$

dvs den samme.