TFY4160/FY1002 Bølgefysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2007.
Veiledning: 17. og 18. oktober. Innleveringsfrist: Mandag 22. oktober kl 12:00.

Øving 8

Oppgave 1

I virkeligheten er transversale bølger på en streng ikke fullstendig dispersjonsfrie. Anta at vi har en uniform metallstreng med sirkulært tverrsnitt A, massetetthet ρ og elastisk modul (Youngs modul) Y. Dispersjonsrelasjonen er da bestemt ved

$$\omega^2 = \frac{S}{\mu} k^2 + \frac{YA^2}{4\pi\mu} k^4$$

der S er strekket i strengen og $\mu = \rho A$ er strengens masse pr lengdeenhet.

a) Vis at avviket fra lineær dispersjon kan neglisjeres dersom bølgelengden oppfyller

$$\lambda \gg A\sqrt{\frac{\pi Y}{S}}$$

Hva innebærer dette for en pianostreng av stål med diameter 1.4 mm som er strukket med en kraft 941.5 N? Youngs modul for stål er $1.95 \cdot 10^{11}$ N/m^2, og massetettheten er $\rho = 7800$ kg/m^3.

b) Finn uttrykk for frekvensavhengigheten til de transversale bølgenes fasehastighet og gruppehastighet, dvs $v(\nu)$ og $v_g(\nu)$. Hva blir v og v_g i grensen $\nu \to 0$? Hva blir v og v_g for riktig høye frekvenser? Sett inn tallverdier for pianostrengen i a) og skisser $v(\nu)$ og $v_g(\nu)$ for frekvenser mellom 0 og 4 kHz.

Oppgave 2

Overflatebølger på dypt vann (dvs i grenseflaten mellom vann og luft) kan med god tilnærmelse beskrives av dispersjonsrelasjonen

$$\omega = \sqrt{gk + \gamma k^3/\rho}$$

Her er $g = 9.8$ m/s^2 tyngdens akselerasjon, $\rho = 1000$ kg/m^3 vannets massetetthet og $\gamma = 73$ mN/m vannets overflatespenning.

Finn uttrykk for bølgelengdeavhengigheten til overflatebølgenes fasehastighet og gruppehastighet, dvs $v(\lambda)$ og $v_g(\lambda)$. Hva blir $v(\lambda)$ og $v_g(\lambda)$ for bølgelengder som er henholdsvis små og store i forhold til $2\pi\sqrt{\gamma/\rho g}$? Sett inn tallverdier for grenseflaten mellom luft og vann og skisser $v(\lambda)$ og $v_g(\lambda)$ for bølgelengder mellom 1 mm og 1 m. (Bruk logaritmisk skala for λ.)

Hva blir gruppehastigheten i grensen $\lambda \to 0$ (evt $k \to \infty$)? Vurder om dette representerer noen "fare" for den oppgitte dispersjonsrelasjonen. (Tips: Bestem hvilken bølgelengde som tilsvarer at gruppehastigheten nærmer seg lyshastigheten i vakuum, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.) Gjør tilsvarende vurdering i grensen $\lambda \to \infty$ (dvs $k \to 0$).

Oppgave 3

Når overflatebølgenes oppførsel bestemmes av tyngdekrefter alene, har vi såkalte *tyngdebølger*. (Vi må selvsagt fremdeles ha en viss overflatespenning for i det hele tatt å ha en veldefinert grenseflate, men kreftene som skyldes overflatespenningen kan nå neglisjeres i forhold til tyngdekreftene.) Da er dispersjonsrelasjonen gitt ved

$$\omega^2 = gk \tanh kd$$

både for dypt og grunt vann. Her er d vannets dybde.

a) Finn uttrykk for tyngdebølgenes fasehastighet $v(k)$ og gruppehastighet $v_g(k)$. Skisser v og v_g som funksjoner av den dimensjonsløse størrelsen kd. Når vil du si at du er på grunt vann, dvs: For hvilke bølgelengder er $v_g \simeq v$ en bra tilnærmelse?

b) Er den gitte dispersjonsrelasjonen for tyngdebølger konsistent med dypvannstilnærmelsen i oppgave 2?