**FY1002/TFY4160 Bølgefysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2008.**
Veiledning: Torsdag 9. oktober. Innleveringsfrist: Mandag 13. oktober kl 12:00.

# Øving 7

## Oppgave 1

I virkeligheten er transversale bølger på en streng ikke fullstendig dispersjonsfrie. Anta at vi har en uniform metallstreng med sirkulært tverrsnitt $A$, massetetthet $\rho$ og elastisk modul (Youngs modul) $Y$. Dispersjonsrelasjonen er da bestemt ved

$$\omega^2 = \frac{S}{\mu}\,k^2 + \frac{YA^2}{4\pi\mu}\,k^4$$

der $S$ er strekket i strengen og $\mu = \rho A$ er strengens masse pr lengdeenhet.

*a*) Vis at bølgene er dispersjonsfrie dersom bølgelengden oppfyller

$$\lambda \gg A\sqrt{\frac{\pi Y}{S}}$$

Anta at du har en pianostreng av stål, med diameter 1.4 mm, som er strukket med en kraft 941.5 N? Youngs modul for stål er $1.95 \cdot 10^{11}$ N/m$^2$, og massetettheten er $\rho = 7800$ kg/m$^3$. Hva bør bølgelengden da være for at vi med god tilnærmelse kan anta dispersjonsfrie bølger på pianostrengen?

*b*) Finn uttrykk for frekvensavhengigheten til de transversale bølgenes fasehastighet og gruppehastighet, dvs $v(\nu)$ og $v_g(\nu)$. (Tips: Ta utgangspunkt i $v(k)$ og $v_g(k)$ og bruk deretter den gitte dispersjonsrelasjonen som gir sammenhengen mellom $\nu$ og $k^2$.) Hva blir $v$ og $v_g$ for lave frekvenser, dvs i grensen $\nu \to 0$? Hva blir $v$ og $v_g$ for riktig høye frekvenser? Sett inn tallverdier for pianostrengen i *a*) og skisser $v(\nu)$ og $v_g(\nu)$ for frekvenser mellom 0 og 4 kHz.

## Oppgave 2

Overflatebølger på dypt vann (dvs i grenseflaten mellom vann og luft) kan med god tilnærmelse beskrives av dispersjonsrelasjonen

$$\omega = \sqrt{gk + \gamma k^3/\rho}$$

Her er $g = 9.8$ m/s$^2$ tyngdens akselerasjon, $\rho = 1000$ kg/m$^3$ vannets massetetthet og $\gamma = 73$ mN/m vannets overflatespenning.

Finn uttrykk for bølgelengdeavhengigheten til overflatebølgenes fasehastighet og gruppehastighet, dvs $v(\lambda)$ og $v_g(\lambda)$. Hva blir $v(\lambda)$ og $v_g(\lambda)$ for bølgelengder som er henholdsvis små og store i forhold til $2\pi\sqrt{\gamma/\rho g}$? Sett inn tallverdier for grenseflaten mellom luft og vann og skisser $v(\lambda)$ og $v_g(\lambda)$ for bølgelengder mellom 1 mm og 1 m. (Bruk logaritmisk skala for $\lambda$.)

Hva blir gruppehastigheten i grensen $\lambda \to 0$ (evt $k \to \infty$)? Vurder om dette representerer noen "fare" for den oppgitte dispersjonsrelasjonen. (Tips: Bestem hvilken bølgelengde som tilsvarer at gruppehastigheten nærmer seg lyshastigheten i vakuum, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.) Gjør tilsvarende vurdering i grensen $\lambda \to \infty$ (dvs $k \to 0$).

**Oppgave 3**

Når overflatebølgenes oppførsel bestemmes av tyngdekrefter alene, har vi såkalte *tyngdebølger*. (Vi må selvsagt fremdeles ha en viss overflatespenning for i det hele tatt å ha en veldefinert grenseflate, men kreftene som skyldes overflatespenningen kan nå neglisjeres i forhold til tyngdekreftene.) Da er dispersjonsrelasjonen gitt ved

$$\omega^2 = gk \tanh kd$$

både for dypt og grunt vann. Her er $d$ vannets dybde.

*a*) Finn uttrykk for tyngdebølgenes fasehastighet $v(k)$ og gruppehastighet $v_g(k)$. Skisser $v$ og $v_g$ som funksjoner av den dimensjonsløse størrelsen $x = kd$. Når vil du si at du er på grunt vann, dvs: For hvilke bølgelengder er $v_g = v$ en brukbar tilnærmelse?

*b*) Er den gitte dispersjonsrelasjonen for tyngdebølger konsistent med dypvannstilnærmelsen i oppgave 2?