

Løsningsforslag til øving 3

Oppgave 1

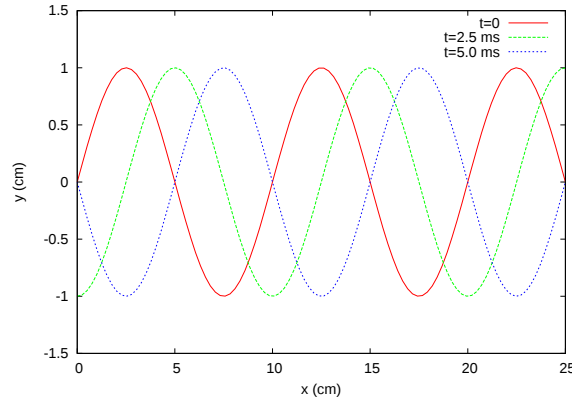
a)

$$y = A \sin(kx - \omega t) = A \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] \quad (1)$$

med $A = 1.0$ cm, $T = 10$ ms og $\lambda = 10$ cm. Med følgende linjer i gnuplot, der bølgetallet angis med enhet cm^{-1} og vinkelfrekvensen med enhet ms^{-1} ,

```
gnuplot> pi=3.141592654
gnuplot> k=2*pi/10
gnuplot> omega=0.2*pi
gnuplot> y0(x)=sin(k*x)
gnuplot> y25(x)=sin(k*x-omega*2.5)
gnuplot> y50(x)=sin(k*x-omega*5.0)
gnuplot> set xrange [0:25]
gnuplot> set yrange [-1.5:1.5]
gnuplot> set xlabel 'x (cm)'
gnuplot> set ylabel 'y (cm)'
gnuplot> plot y0(x) title 't=0', y25(x) title 't=2.5 ms', y50(x) title 't=5.0 ms'
```

får vi denne figuren:



Utsvinget vil bli det samme som for $t = 0$ for hver hele periode, dvs for $t = nT = 10n$ ms, der $n = 1, 2, 3, \dots$

b) Vi ser av figuren ovenfor, og har allerede i punkt a slått fast at $T = 10$ ms.

c) Vi ser av figuren ovenfor, og har allerede i punkt a slått fast at $\lambda = 10$ cm.

d) En bølgetopp forplanter seg en bølgelengde $\lambda = 10$ cm på en periode $T = 10$ ms. Altså er fasehastigheten

$$v_f = \frac{\lambda}{T} = \frac{0.10 \text{ m}}{0.010 \text{ s}} = 10 \text{ m/s}$$

Hastigheten til strengenelementene (i y -retning) er gitt ved:

$$v_p = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (A \sin(kx - \omega t)) = -\omega A \cos(kx - \omega t). \quad (2)$$

Maksimalverdien av $\cos(kx - \omega t)$ er 1. Altså er maksimalhastighet for et strengenelement:

$$v_p^{\max} = \omega A = 200\pi \text{ s}^{-1} \cdot 0.010 \text{ m} = 2\pi \text{ m/s} \approx 6.3 \text{ m/s}$$

e)

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (A \sin(kx - \omega t)) = \frac{\partial}{\partial t} (-\omega A \cos(kx - \omega t)) = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t) \quad (3)$$

som har maksimalverdi

$$a^{\max} = \omega^2 A = (200\pi \text{ s}^{-1})^2 \cdot 0.010 \text{ m} = 3.9 \cdot 10^3 \text{ m/s}^2.$$

f) Vi har

$$\sin u = \cos\left(u - \frac{\pi}{2}\right).$$

Derfor, dersom vi velger $\phi = -\pi/2$, vil $y = A \cos(kx - \omega t + \phi)$ beskrive samme bølge som $y = A \sin(kx - \omega t)$.

Merknad: Fra (1), (2) og (3) har vi

$$\begin{aligned} y &= A \sin(kx - \omega t) \\ v_p &= -\omega A \cos(kx - \omega t) = -\omega A \sin\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \omega A \sin\left(kx - \omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \omega A \sin\left[kx - \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right] \\ a &= -\omega^2 A \sin(kx - \omega t) = \omega^2 A \sin(kx - \omega t - \pi) = \omega^2 A \sin[kx - (\omega t + \pi)]. \end{aligned}$$

Med andre ord så sier vi at a i tid er faseforskjøvet $\pi/2$ foran v_p som igjen er faseforskjøvet $\pi/2$ foran y .

Oppgave 2

a)

$$\begin{aligned} y_3 &= y_1 + y_2 \\ &= A \cos(kx - \omega t + \phi_1) + A \cos(kx - \omega t + \phi_2) \\ &= 2A \cos \frac{kx - \omega t + \phi_1 + kx - \omega t + \phi_2}{2} \cdot \cos \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \\ &= 2A \cos\left(kx - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \cos \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \\ &= A_3 \cos(kx - \omega t + \phi_3) \end{aligned} \quad (4)$$

der vi har satt

$$A_3 \equiv 2A \cos \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \equiv 2A \cos \frac{\Delta\phi}{2} \quad (5)$$

$$\phi_3 = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \quad (6)$$

b) $|A_3|$ har maksimalverdi når

$$\left| \cos \frac{\Delta\phi}{2} \right| = 1,$$

dvs når $\Delta\phi/2 = n \cdot \pi, n = 0, 1, 2, \dots$, dvs når $\Delta\phi = n \cdot 2\pi, n = 0, 1, 2, \dots$

Da får vi $|A_3|^{\max} = 2A$ (Bølgene adderes i fase.)

$|A_3|$ har minimalverdi nr

$$\cos \frac{\Delta\phi}{2} = 0,$$

dvs når $\Delta\phi/2 = (2n + 1) \cdot \pi/2, n = 0, 1, 2, \dots$, dvs når $\Delta\phi = (2n + 1) \cdot \pi, n = 0, 1, 2, \dots$

Da får vi $|A_3|^{\min} = 0$ (Bølgene adderes i motfase.)

Oppgave 3

a) Vi har:

$$\frac{\partial^2 D_1(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 D_1(x, t)}{\partial t^2}. \quad (7)$$

og

$$\frac{\partial^2 D_2(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 D_2(x, t)}{\partial t^2}. \quad (8)$$

(7) + (8) gir (siden partiell derivasjon er en lineær operasjon):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 D(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 [D_1(x, t) + D_2(x, t)]}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 D_1(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D_2(x, t)}{\partial x^2} \\ &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 D_1(x, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 D_2(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 [D_1(x, t) + D_2(x, t)]}{\partial t^2} \\ &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 D(x, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (9)$$

b) Vi betrakter først $f(x - vt)$ og setter $X = x - vt$. Vi får da:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial X} \underbrace{\frac{\partial X}{\partial t}}_{=-v} = -v \frac{\partial f}{\partial X} \quad (10)$$

og videre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) = -v \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \underbrace{\frac{\partial X}{\partial t}}_{=-v} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \quad (11)$$

eller

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \quad (12)$$

Helt tilsvarende (da $\partial X/\partial x = 1$) får vi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \quad (13)$$

(12) og (13) gir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (14)$$

som viser at $f(x - vt)$ oppfyller lign. (1) i oppgaveteksten.

På helt tilsvarende vis (bortsett fra at vi ikke får minustegn foran v som i (10) og (11)) får vi:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \quad (15)$$

Punkt a og lign. (14) og (15) gir da at:

$$D(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

oppfyller lign. (1) i oppgaveteksten.

Oppgave 4

a) Bølgehastigheten for transversale bølger på en streng er utledet i forelesningene. Vi får

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}} = \sqrt{\frac{8.5}{0.028}} \simeq 17 \text{ m/s}$$

Vi har ikke dispersjon i dette systemet, så v er den samme for alle bølger, uansett frekvens.

b)

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu$$

som gir bølgelengden

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \simeq 17 \text{ m}$$

Ettersom λ er omvendt proporsjonal med ν , vil en frekvens på 3.0 Hz resultere i en bølgelengde på ca 5.8 m.

c) Vi har harmoniske bølger som kan beskrives ved

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \phi)$$

der $k = 2\pi/\lambda$ er bølgetallet og ϕ en fasekonstant. Vi velger $x = 0$ ved svingekilden og har

$$y(0, t) = A \cos(-\omega t + \phi) = A \cos \omega t$$

som gir $\phi = 0$ siden $\cos u = \cos(-u)$. Dermed er bølgen beskrevet ved

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

For $x = 1.0$ og $x = 5.0$ m får vi

$$y(1.0, t) \simeq A \cos \left(2\pi \frac{1.0}{17} - 2\pi t \right)$$

$$y(5.0, t) \simeq A \cos \left(2\pi \frac{5.0}{17} - 2\pi t \right)$$

med t målt i sekunder. Faseforskjellen mellom utsvinget i disse to posisjonene er

$$\Delta\phi = \frac{8\pi}{17} \simeq 1.4 \simeq 83^\circ$$