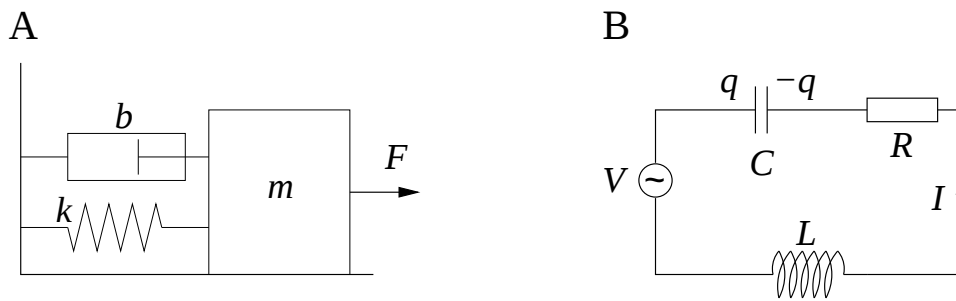


## Øving 2



a) I forelesningene har vi sett at det mekaniske svingesystemet i figur A ovenfor, med  $F(t) = F_0 \cos \omega t$ , oppfyller bevegelsesligningen

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t,$$

der  $x$  representerer massens utsving i forhold til likevektsposisjonen  $x = 0$ .

Vis at Kirchhoffs spenningsregel anvendt på den elektriske svingekretsen i figur B, med  $V(t) = V_0 \cos \omega t$ , gir en tilsvarende differensialligning,

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = V_0 \cos \omega t,$$

for ladningen  $q$  på kondensatoren.

Ved direkte sammenligning ser en at selvinduktansen  $L$  i det elektriske svingesystemet er *analog* til massen  $m$  i det mekaniske svingesystemet. (Ikke urimelig:  $m$  representerer treghet i det mekaniske systemet, dvs en motstand mot endringer i hastigheten;  $L$  representerer treghet i det elektriske systemet, dvs en motstand mot endringer i strømstyrken.)

Hva er den elektriske svingekretsens analogier til størrelsene  $b$ ,  $k$ ,  $F_0$ ,  $x$  og  $\dot{x}$  i det mekaniske systemet?

b) Siden den elektriske kretsen er ”analog” til det mekaniske systemet, må ladningen på kondensatoren kunne skrives på formen

$$q(t) = q_0 \sin(\omega t - \alpha),$$

der vi antar at spenningskilden har stått på så lenge at en eventuell homogen løsning  $q_h(t)$  av den tilsvarende homogene ligningen kan neglisjeres. (I forelesningene skrev vi  $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$  for utsvinget til massen  $m$  i det mekaniske svingesystemet. Vi har med andre ord her valgt motsatt fortegn på fasekonstanten  $\alpha$  i uttrykket for ladningen  $q(t)$ . Motivasjonen for å gjøre dette er ikke å skape forvirring, men snarere å gjøre sammenhengen med det som ble gjort i El.mag. i vår så tydelig som mulig, for den som vil gå tilbake å sjekke opp det.)

Sett inn det oppgitte uttrykket for  $q(t)$  i differensialligningen og vis at amplituden blir

$$q_0 = \frac{V_0}{\omega \sqrt{R^2 + X^2}},$$

mens fasekonstanten er gitt ved

$$\alpha = \arctan\left(\frac{X}{R}\right).$$

Her er  $X = \omega L - 1/\omega C$  den såkalte *reaktansen* til den elektriske svingekretsen.

Anta at kretsen har følgende komponenter:  $V_0 = 10$  V,  $R = 1.0 \Omega$ ,  $L = 0.1$  mH,  $C = 10$  nF. Hva blir da halvverdbredden  $\Delta\omega$  for resonanskurven  $q_0(\omega)$ ? Hva blir kretsens godhetsfaktor  $Q = \omega_0/\Delta\omega$ ?

Tegn opp ladningsamplituden  $q_0$ , strømamplituden  $\omega q_0$  og fasevinkelen  $\alpha$  som funksjoner av vinkelfrekvensen  $\omega$ . (Tips: Bruk f.eks. MATLAB, Octave eller gnuplot til å plote disse tre funksjonene. Velg ploteintervall for  $\omega$  slik at resonanstoppene kommer tydelig fram, og uten at de blir altfor smale på grafene.)

Tips:

Spenningsfall over motstand:  $RI$ ; over kondensator:  $q/C$ ; over induktans:  $L\dot{I}$ .

Du vil trolig få bruk for uttrykkene for sinus og cosinus til differansen mellom to vinkler. Videre kan det være lurt å tegne opp en rettvinklet trekant med utgangspunkt i at  $\tan \alpha = X/R$ , med tanke på at du har bruk for uttrykk for både  $\sin \alpha$  og  $\cos \alpha$ .

c) Vi betrakter nå frie og svakt dempede svingninger i det mekaniske systemet i figur A (dvs  $F = 0$  og  $b/2m \equiv \delta \ll \omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ ). Regn ut relativt energitap pr periode,

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E(t) - E(t+T)}{E(t)},$$

og vis at godhetsfaktoren blir den samme, enten den defineres som  $Q \equiv 2\pi E/\Delta E$ , eller som  $Q \equiv \omega_0/\Delta\omega$  (der  $\Delta\omega$  er resonanstoppens halvverdibredde ved tvungne svingninger, som ovenfor).  
 Tips:  $\exp(-z) \simeq 1 - z$  dersom  $|z| \ll 1$ .

d) Vis at (midlere) tilført effekt,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T F_0 \cos \omega t \dot{x}(t) dt,$$

tilsvarer (midlere) tapt effekt på grunn av demping,

$$\langle P_d \rangle = \langle b\dot{x}^2 \rangle,$$

i det mekaniske systemet i figur A.