

## Løsningsforslag til øving 4

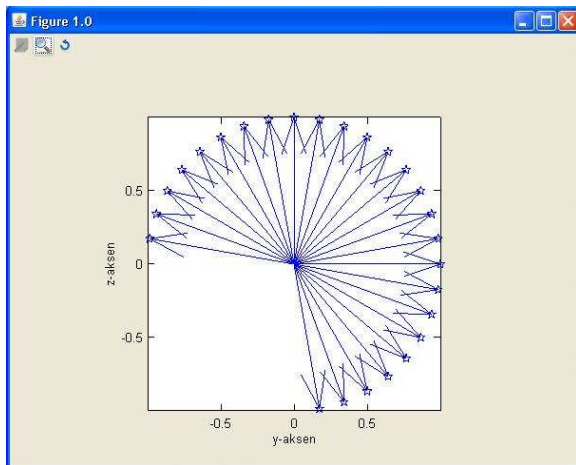
## Oppgave 1

a)

$$\begin{aligned}
 |\vec{D}| &= D_0 [\cos^2(kx - \omega t) + \sin^2(kx - \omega t)]^{1/2} \\
 &= D_0
 \end{aligned}$$

for alle  $x$  og  $t$ . Med andre ord, vi har overalt og til enhver tid et utsving med konstant amplitude  $D_0$ . Dette betyr at spissen på vektoren  $\vec{D}$  alltid ligger på en sirkel med radius  $D_0$ . Siden både  $D_z$  og  $D_y$  kontinuerlig gjennomløper alle verdier mellom  $-D_0$  og  $+D_0$ , må  $\vec{D}$  kontinuerlig gjennomløpe alle punkter på sirkelen. Dvs at bølgen er sirkulærpolarisert.

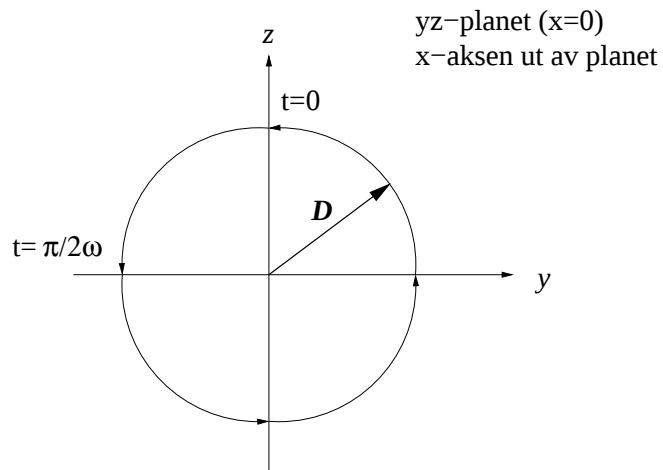
Det oppgitte MATLAB-programmet kjører fint i MATLAB. I min versjon av Octave måtte jeg fjerne spesifikasjonen av pilfarge i kommandoen compass for å få det til å kjøre som det skulle. Her er et bilde underveis i "animasjonen":



b)

$$\begin{aligned}
 D_z &= D_0 \cos(kx - \omega t) = D_0 \cos(\omega t - kx) \\
 D_y &= D_0 \sin(kx - \omega t) = D_0 \cos(kx - \omega t - \pi/2) \\
 &= D_0 \cos[(\omega t + \pi/2) - kx]
 \end{aligned}$$

Dette betyr at for alle verdier av  $x$  ligger  $D_y$  faseforskjøvet  $\pi/2$  foran  $D_z$ . F.eks. vil  $D_y$  nå sin maksimalverdi  $+D_0$  en fase  $\pi/2$  tidligere enn  $D_z$ . Når  $D_y = +D_0$ , er  $D_z = 0$ , og  $D_y = 0$  når  $D_z = +D_0$ . Dvs at vi for enhver verdi av  $x$  (f.eks.  $x = 0$ ) har en situasjon som skissert nedenfor:



Bølgen forplanter seg i positiv  $x$ -retning. Vi ser derfor av skissen ovenfor at  $\vec{D}$  roterer mot urviseren for en observatør som ser mot bølgens forplantningsretning. Bølgen er altså venstredreie.

c) Skal vi ha en bølge som er høyredreie, må vi la  $D_z$  ligge en fase  $\pi/2$  foran  $D_y$ . Det får vi ved f.eks.

$$D_z = D_0 \sin(kx - \omega t)$$

og

$$D_y = D_0 \cos(kx - \omega t)$$

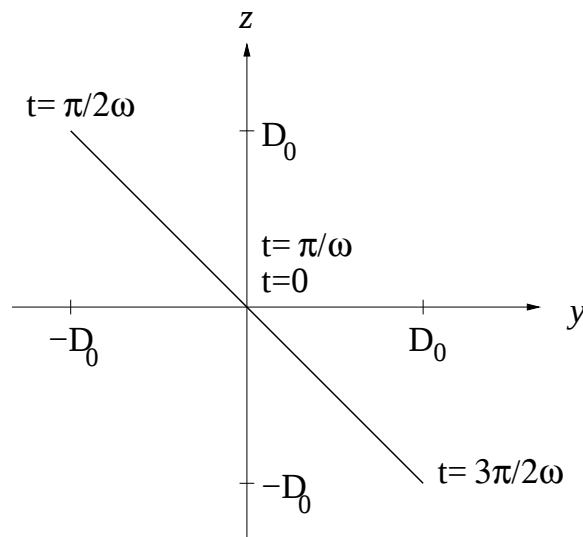
d) Vi har at

$$\sin(kx - \omega t + \pi) = -\sin(kx - \omega t)$$

slik at for bølgen beskrevet ved

$$\vec{D} = D_0 \sin(kx - \omega t) \hat{y} + D_0 \sin(kx - \omega t + \pi) \hat{z}$$

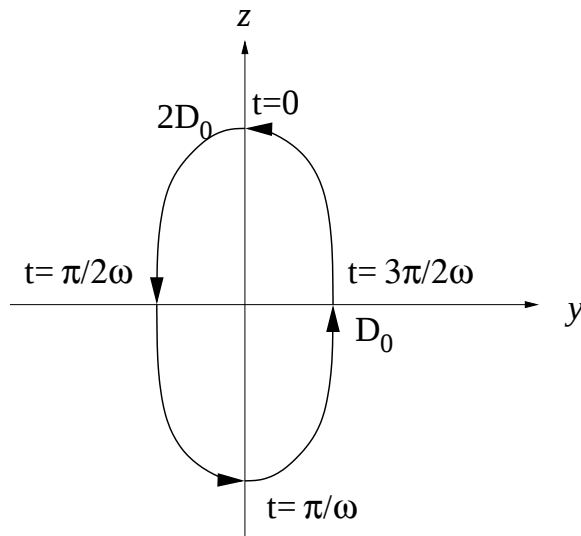
vil vi ha like stor  $y$ - og  $z$ -komponent, men med motsatt fortegn. Det skulle da bli følgende rette linje i  $yz$ -planet ( $z = -y$ ):



For bølgen beskrevet ved

$$\mathbf{D} = D_y \hat{y} + D_z \hat{z} = D_0 \sin(kx - \omega t) \hat{y} + 2D_0 \cos(kx - \omega t) \hat{z}$$

får vi en ellipse i  $yz$ -planet:

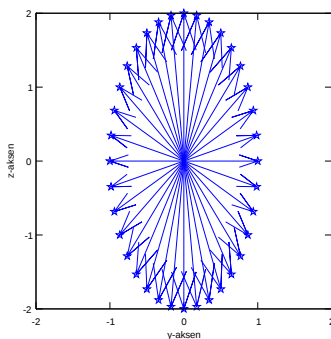


ettersom vi har

$$\left(\frac{D_y}{D_0}\right)^2 + \left(\frac{D_z}{2D_0}\right)^2 = \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$$

dvs ellipse med akse  $D_0$  i  $y$ -retning og akse  $2D_0$  i  $z$ -retning.

Her er figuren produsert i Octave:



e)

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_h + \mathbf{D}_v &= D_0 \hat{y} \sin(kx - \omega t) - D_0 \hat{z} \cos(kx - \omega t) \\ &+ D_0 \hat{y} \sin(kx - \omega t) + D_0 \hat{z} \cos(kx - \omega t) \\ &= 2D_0 \hat{y} \sin(kx - \omega t) \end{aligned}$$

Dvs, en lineærpolarisert bølge, polarisert i  $y$ -retning.

Hva så med polarisasjon i en vilkårlig retning i  $yz$ -planet, dvs i retningen gitt ved

$$\hat{n} = \hat{y} \cos \alpha + \hat{z} \sin \alpha,$$

som danner vinkelen  $\alpha$  med  $y$ -aksen? En slik lineærpolarisert bølge får vi til ved å legge sammen

$$\mathbf{D}_h = D_0 \hat{y} \sin(kx - \omega t + 2\alpha) - D_0 \hat{z} \cos(kx - \omega t + 2\alpha)$$

og

$$\mathbf{D}_v = D_0 \hat{y} \sin(kx - \omega t) + D_0 \hat{z} \cos(kx - \omega t)$$

på dette viset:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_v + \mathbf{D}_h &= D_0 \hat{y} [\sin(kx - \omega t + \alpha - \alpha) + \sin(kx - \omega t + \alpha + \alpha)] \\ &+ D_0 \hat{z} [\cos(kx - \omega t + \alpha - \alpha) - \cos(kx - \omega t + \alpha + \alpha)] \\ &= D_0 \hat{y} \cos \alpha \sin(kx - \omega t + \alpha) + D_0 \hat{z} \sin \alpha \sin(kx - \omega t + \alpha) \\ &= D_0 \hat{n} \sin(kx - \omega t + \alpha) \end{aligned}$$

der vi har benyttet de velkjente reglene for sinus og cosinus til sum og differanse av to vinkler, hvor de to vinklene her er  $kx - \omega t + \alpha$  og  $\alpha$ .

## Oppgave 2

a) Longitudinale utsving på ei slik fjær oppfyller bølgeligningen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\mu}{K} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

og det eneste vi krever av funksjonen  $\xi(x, t)$  er at den kan skrives på formen  $f(x - vt)$  eller  $g(x + vt)$ , eller en kombinasjon av disse to, der  $f$  og  $g$  er vilkårlige to ganger deriverbare funksjoner. Den oppgitte gaussformede bølgepulsen er på en slik form ( $f(x - vt)$ ) og representerer dermed en mulig bølgepuls langs fjæra. Bølgen propagerer i positiv  $x$ -retning.

b) Som utledet i forelesningene, og som vi ser av ligningen ovenfor, har vi

$$v = \sqrt{\frac{K}{\mu}}$$

Uttrykket på høyre side har dimensjon

$$\sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{m/s}^2}{\text{kg/m}}} = \sqrt{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \text{m/s}$$

som er det vi skal ha.

c) Bølgepulsens energi endrer seg ikke med tiden. Vi kan derfor beregne  $E$  for et hvilket som helst tidspunkt, for eksempel  $t = 0$ . Med energi  $\varepsilon(x, 0) dx$  på intervallet  $(x, x + dx)$ , må total energi være

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x, 0) dx$$

Her inngår størrelsen  $d\xi/dX = d\xi/dx$ , og med  $t = 0$  har vi

$$\frac{d\xi}{dx} = \xi_0(-2x/a^2)e^{-x^2/a^2}$$

som gir

$$\varepsilon(x, 0) = \frac{2\mu v^2 \xi_0^2}{a^2} \frac{2x^2}{a^2} e^{-2x^2/a^2}$$

Vi substituerer  $\beta = \sqrt{2}x/a$  som gir (med  $dx = a d\beta/\sqrt{2}$ )

$$E = \frac{2\mu v^2 \xi_0^2}{\sqrt{2}a} \int_{-\infty}^{\infty} \beta^2 e^{-\beta^2} = \frac{2\mu v^2 \xi_0^2}{\sqrt{2}a} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi} \mu v^2 \xi_0^2}{\sqrt{2}a}$$

som skulle vises.

d) Bølgepulsens impuls endrer seg heller ikke med tiden. Vi kan derfor også beregne  $p$  ved  $t = 0$ . Men la oss først se hvor langt vi kan komme uten egentlig å regne all verden. For det første: Ettersom  $\xi(x, t) = \xi(x - vt)$ , har vi sammenhengen

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Dessuten: Utsvinget  $\xi$  er en *symmetrisk* funksjon mhp argumentet  $X = x - vt$ . Dermed blir  $\partial \xi / \partial x$  en *antisymmetrisk* funksjon mhp  $X$ . Dermed har vi:

$$\begin{aligned} p &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu \left( 1 - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) (-v) \frac{\partial \xi}{\partial x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu v \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 dx \\ &= \frac{E}{v} \\ &= \frac{\sqrt{\pi} \mu v \xi_0^2}{\sqrt{2}a} \end{aligned}$$

Her har vi brukt at integralet av den antisymmetriske funksjonen  $\partial \xi / \partial x$  er lik null.

### Oppgave 3

a) Innsetting av den antatte løsningen gir

$$\begin{aligned} \xi(x + d) - \xi(x) &= \xi_0 [\sin(kx + kd - \omega t) - \sin(kx - \omega t)] \\ &= \xi_0 \cdot 2 \cos \frac{kx + kd - \omega t + kx - \omega t}{2} \sin \frac{kx + kd - \omega t - kx + \omega t}{2} \\ &= 2\xi_0 \cos(kx - \omega t + \frac{kd}{2}) \sin \frac{kd}{2} \\ \xi(x - d) - \xi(x) &= \xi_0 [\sin(kx - kd - \omega t) - \sin(kx - \omega t)] \\ &= \xi_0 \cdot 2 \cos \frac{kx - kd - \omega t + kx - \omega t}{2} \sin \frac{kx - kd - \omega t - kx + \omega t}{2} \\ &= -2\xi_0 \cos(kx - \omega t - \frac{kd}{2}) \sin \frac{kd}{2} \end{aligned}$$

der vi har benyttet den oppgitte trigonometriske relasjonen.

b) I neste omgang bestemmer vi høyre side i bevegelsesligningen (gitt i oppgaveteksten) ved å legge de to uttrykkene i punkt a sammen. Vi benytter oss av de oppgitte trigonometriske relasjonene

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

og får

$$\begin{aligned} \xi(x+d) + \xi(x-d) - 2\xi(x) &= 2\xi_0 \sin \frac{kd}{2} \left[ \cos(kx - \omega t + \frac{kd}{2}) - \cos(kx - \omega t - \frac{kd}{2}) \right] \\ &= 2\xi_0 \sin \frac{kd}{2} \left[ \cos(kx - \omega t) \cos \frac{kd}{2} - \sin(kx - \omega t) \sin \frac{kd}{2} \right. \\ &\quad \left. - \cos(kx - \omega t) \cos \frac{kd}{2} - \sin(kx - \omega t) \sin \frac{kd}{2} \right] \\ &= -4\xi_0 \sin^2 \frac{kd}{2} \sin(kx - \omega t) \end{aligned}$$

Her har vi også brukt at  $\sin \alpha = -\sin(-\alpha)$  og  $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$ . På venstre side av bevegelsesligningen inngår den andrederiverte av  $\xi$  med hensyn på  $t$ :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

Vi setter alt sammen inn i bevegelsesligningen, forkorter felles faktor  $\xi_0$  og  $\sin(kx - \omega t)$  på begge sider, og får

$$-m\omega^2 = -4s \sin^2 \frac{kd}{2}$$

dvs

$$\omega^2 = \frac{4s}{m} \sin^2 \frac{kd}{2}$$

som vi skulle vise. Dette viser samtidig at antagelsen var korrekt, nemlig at harmoniske bølger er løsning av den gitte bevegelsesligningen.

c) Når  $kd \ll 1$ , kan vi sette

$$\sin^2 \frac{kd}{2} \simeq \frac{k^2 d^2}{4}$$

slik at

$$\omega^2 \simeq \frac{4s}{m} \cdot \frac{k^2 d^2}{4} = \frac{sk^2 d^2}{m}$$

som gir

$$v = \frac{\omega}{k} \simeq \sqrt{\frac{sd^2}{m}}$$

dvs uavhengig av bølgelengden (og bølgetallet).

d) Lydens hastighet i typiske metaller kan vi anslå ved å finne fram til tallverdier for Youngs modul og massetettheten. Et par eksempler:

Jern:

$$Y = 1.9 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2, \rho = 7200 \text{ kg/m}^3, v = \sqrt{Y/\rho} = 5.1 \text{ km/s}$$

Bly:

$$Y = 0.16 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2, \rho = 11340 \text{ kg/m}^3, v = \sqrt{Y/\rho} = 1.2 \text{ km/s}$$

Med andre ord, bølgehastigheten er av størrelsesorden  $10^3$  m/s. Det hørbare området dekker frekvenser mellom ca 20 og 20000 Hz, som dermed tilsvarer bølgelengder  $\lambda = v/\nu$  i området mellom 5 cm og 50 m. Dette er uansett *velldig mye mer* enn typiske avstander mellom nabotomer i en krystall (mindre enn 1 nm), så for hørbar lyd er tilnærmelsen  $kd \ll 1$ , eventuelt  $\lambda \gg d$  godt oppfylt.