FY1002/TFY4160 Bølgefysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2009.
Veiledning: Fredag 18. og mandag 21. september. Innleveringsfrist: Onsdag 23. september kl 12:00.

Øving 4

Oppgave 1

a) Verifiser at en transversal bølge som forplanter seg langs x-aksen med utsving $\boldsymbol{D}$ med komponentene D_z og D_y gitt ved

$$D_z = D_0 \cos(kx - \omega t) \tag{1}$$

og

$$D_y = D_0 \sin(kx - \omega t) \tag{2}$$

er sirkulærpolarisert. (Tips: Ta for deg $|\boldsymbol{D}|$, samt $\boldsymbol{D}(t)$ ved en fast posisjon x. Bruk gjerne MATLAB eller Octave til å studere $\boldsymbol{D}(t)$, se neste side, i tillegg til å argumentere direkte ut fra uttrykket for $\boldsymbol{D}(t)$.)

b) Bestem om dreieretningen til $\boldsymbol{D}$ er med eller mot klokka sett fra en observatør som ser *mot* bølgens forplantningsretning. (Dersom $\boldsymbol{D}$ dreier med klokka, sies bølgen å være høyredreiende. Dersom $\boldsymbol{D}$ dreier mot klokka, sies bølgen å være venstredreiende.) Her kan du også bruke MATLAB/Octave i tillegg til å "se på" $\boldsymbol{D}(t)$.

c) Skriv opp ligninger tilsvarende ligning (1) og (2) for en bølge som har motsatt sirkulær polarisasjon av bølgen gitt ved lign. (1) og (2).

d) Tegn opp, i (y, z)-planet, kurven som (spissen av) $\boldsymbol{D}$ følger dersom

$$\boldsymbol{D} = D_0 \sin(kx - \omega t)\hat{y} + D_0 \sin(kx - \omega t + \pi)\hat{z}$$

Gjør det samme når

$$\boldsymbol{D} = D_0 \sin(kx - \omega t)\hat{y} + 2D_0 \cos(kx - \omega t)\hat{z}$$

Igjen: Benytt papir og blyant og/eller MATLAB/Octave.

e) Vis at en lineærpolarisert bølge kan betraktes som en superposisjon av to sirkulærpolariserte bølger, med like stor amplitude, men med motsatt dreieretning, dvs en høyredreiende og en venstredreiende. (Tips: Dette burde gå relativt greit for polarisasjon langs y- eller langs z-aksen. Hvis du er riktig ambisiøs, viser du det samme for polarisasjon langs en vilkårlig retning i yz-planet.)

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% MATLAB-program polarisering.m som utgangspunkt for
%% oppgave 1 i oving 4 i Bolgefysikk hosten 2009
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Gi verdier for pi, lambda og T; regn ut k og omega
pi = 3.141592654;
lambda = 1.0;
T = 1.0;
k = 2*pi/lambda;
omega = 2*pi/T;
% amplituder y0 og z0, inklusive fortegn
y0 = 1.0;
z0 = 1.0;
% N = antall punkter, med N = 36 tegnes en pil og
% et punkt for hver 10. grad
N = 36;
% Angi x-verdi
x = lambda/2;
% "Animasjon" av hvordan D-vektor roterer
% i yz-planet som funksjon av tida, i posisjon x
figure;
axis_range = 1.1*max(abs(y0),abs(z0));
axis([-axis_range axis_range -axis_range axis_range]);
hold on;
xlabel('y-aksen');
ylabel('z-aksen');
for i=1:N
    t = i*T/N;
    y = y0*sin(k*x-omega*t);
    z = z0*cos(k*x-omega*t);
    % pb = pentagram med blaa farge
    plot(y,z,'pb');
    % med compass(a,b) tegnes en pil fra origo til punktet (a,b)
    % r = roed farge
    compass(y,z,'r');
    % med pause(n) forsinkes animasjonen i n sekunder
    pause(0.15);
end
```

Oppgave 2

En gaussformet bølgepuls

$$\xi(x,t) = \xi_0 \exp\left[-\frac{(x-vt)^2}{a^2}\right]$$

vandrer med hastighet v langs ei (uendelig lang) fjær med massetetthet μ [kg/m] og elastisk modul K [N]. Størrelsen $\xi(x,t)$ representerer det longitudinale utsvinget (i forhold til likevekt) ved tidspunkt t for den biten av fjæra som har likevektsposisjon x.

a) Hvordan kan vi være sikre på at $\xi(x,t)$ virkelig *er* en mulig bølgepuls langs ei slik fjær? I hvilken retning propagerer bølgen?

b) Hvordan avhenger bølgehastigheten v av fjæras elastiske egenskaper (dvs K) og treghetsegenskaper (dvs μ)? Kontroller at uttrykket for v har riktig dimensjon. (Her er det kun meningen at du skal skrive ned uttrykket for v, ikke utlede det.)

c) Finn et uttrykk for (den totale) energien E assosiert med bølgepulsen. Kontroller at uttrykket for E har riktig dimensjon.

Tips: Ta utgangspunkt i at bølgens energi pr lengdeenhet er

$$\varepsilon(x,t) = \mu v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2$$

som utledet i forelesningene. Dermed er $\varepsilon(x,t)\,dx$ bølgens energiinnhold mellom x og $x+dx$. Det oppgis her følgende integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta^2 e^{-\beta^2} d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

d) Regn ut bølgens totale impuls p og sjekk at uttrykket tilfredsstiller sammenhengen $p = E/v$.

Tips: Ta utgangspunkt i at bølgens impuls pr lengdeenhet er

$$\pi(x,t) = \mu\left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi}{\partial t}$$

som utledet i forelesningene. Det oppgis her at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta e^{-\beta^2} d\beta = 0$$

(som du kanskje ser, uten å løse integralet? Se forøvrig side 5.)

Svar:
2c: $E = \sqrt{\pi}\mu v^2 \xi_0^2/\sqrt{2}a$

Oppgave 3

Som nevnt i forelesningene, er det mulig å finne en eksakt løsning for longitudinale bølger på masse-fjær-transmisjonslinjen, uten å anta at bølgelengden λ er mye større enn avstanden d mellom to nabomasser. Ved å betrakte kreftene som virker på massen m med likevektsposisjon x, endte vi opp med følgende bevegelsesligning:

$$m\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = s\left[\xi(x+d) + \xi(x-d) - 2\xi(x)\right]$$

Her er $\xi(x \pm d)$ utsvinget til massen med likevektsposisjon $x \pm d$, mens s er fjærkonstanten (bruker her s siden vi trenger k for å angi bølgetallet).
La oss starte med å anta at en harmonisk bølge på formen

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

er løsning av bevegelsesligningen ovenfor. At harmoniske bølger faktisk *er* løsning av ligningen, skal vi straks se. Samtidig vil vi finne sammenhengen mellom ω og k.

a) Vis at $\xi(x+d) - \xi(x)$ og $\xi(x-d) - \xi(x)$ kan skrives som

$$\begin{aligned}
\xi(x+d) - \xi(x) &= 2\xi_0 \cos(kx - \omega t + \frac{kd}{2}) \sin\frac{kd}{2} \\
\xi(x-d) - \xi(x) &= -2\xi_0 \cos(kx - \omega t - \frac{kd}{2}) \sin\frac{kd}{2}
\end{aligned}$$

Tips: Benytt relasjonen

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

b) Vis deretter at bevegelsesligningen ovenfor resulterer i følgende sammenheng mellom vinkelfrekvensen ω og bølgetallet k (den såkalte *dispersjonsrelasjonen*):

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{4s}{m}\sin^2\left(\frac{kd}{2}\right)}$$

Tips: Benytt relasjonene

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

c) I forelesningene viste vi at for lange bølgelengder ($\lambda \gg d$, eventuelt $kd \ll 1$) blir bølgehastigheten konstant (dvs uavhengig av bølgelengden) og lik

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{sd^2}{m}}$$

Vis at den eksakte sammenhengen mellom ω og k fra punkt b gir samme resultat for v dersom $kd \ll 1$.

d) Et slik enkelt masse-fjær-system som vi har sett på her, er en ganske bra modell for forplantning av longitudinale bølger i krystallinske materialer. (Du kan lære mer om dette i emner som Faste stoffers fysikk senere i studiet.)
Bruk resultatene ovenfor til å vise at longitudinale bølger tilsvarende hørbar lyd vil forplante seg med konstant (dvs frekvensuavhengig) hastighet v gjennom en krystall, f.eks. et metall.
Tips: Anslå bølgelengden for hørbar lyd og sammenlign med en typisk avstand mellom naboatomer i en metallkrystall.

Ekstranøtt:
I oppgave 2 fikk vi bruk for integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta^2 e^{-\beta^2} d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Dersom du i stedet fikk oppgitt integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\beta^2} d\beta = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$

hvordan kunne du da ha *regnet ut* at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta^2 e^{-\beta^2} d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}?$$

Kan du svare på det, tar du nok også

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta^4 e^{-\beta^2} d\beta = ??$$