

Øving 9

Tema: Refleksjon og transmisjon av e.m. bølge (normalt innfall). Geometrisk optikk 3 lover. Grenseflatebetingelser for feltene D , E , B og H .

Oppgave 1

a) Planet $z = 0$ danner grenseflaten mellom to lineære medier 1 ($z < 0$) og 2 ($z > 0$), med permittiviteter og permeabiliteter henholdsvis ε_1 , μ_1 og ε_2 , μ_2 . Anta at en plan harmonisk elektromagnetisk bølge kommer inn fra venstre, dvs den forplanter seg i positiv z -retning. Amplituden til elektrisk felt i innkommende bølge er E_{i0} . Vis at bølgen som reflekteres i $z = 0$ har amplitude

$$E_{r0} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} E_{i0}$$

og at bølgen som transmitteres i $z = 0$ har amplitude

$$E_{t0} = \frac{2}{1 + \beta} E_{i0}$$

Her er

$$\beta \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2}$$

med $v_j = c/n_j$ = bølgens (fase-)hastighet i medium j . n_j er brytningsindeksen i medium j . (Dette tilsvarer figuren i oppgave 2, med alle vinkler lik null.)

b) Innkommende bølge har intensitet I_i . Denne fordeler seg på den reflekterte (I_r) og den transmitterte (I_t) bølgen. Finn refleksjonskoeffisienten

$$R \equiv \frac{I_r}{I_i}$$

og transmisjonskoeffisienten

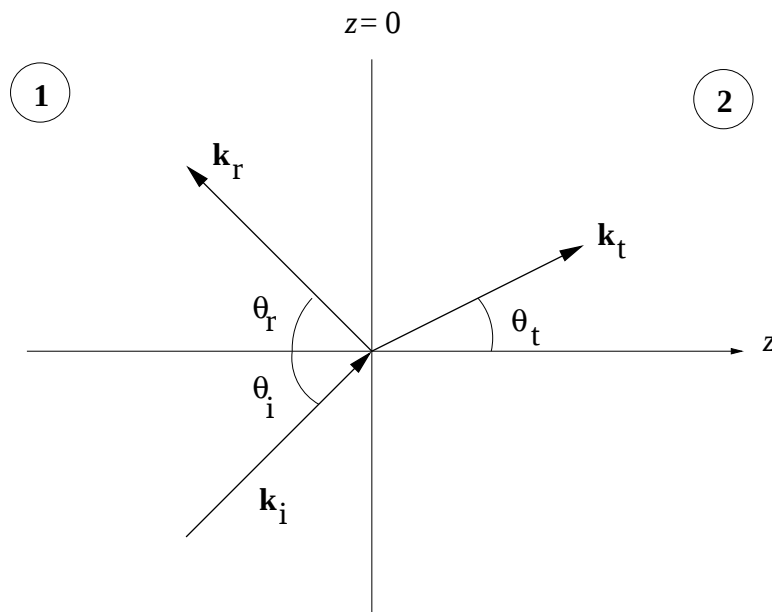
$$T \equiv \frac{I_t}{I_i}$$

uttrykt ved brytningsindeksene n_1 og n_2 i det vi antar at begge medier er umagnetiske, dvs $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$. Bestem tallverdier for R og T for grenseflaten mellom luft ($\simeq$ vakuum) og glass med relativ permittivitet 2.25.

Oppgave 2

Geometrisk optikkens tre lover

Planet $z = 0$ danner grenseflaten mellom to lineære medier 1 ($z < 0$) og 2 ($z > 0$), med brytningsindekser henholdsvis n_1 og n_2 . Anta at en plan harmonisk elektromagnetisk bølge kommer inn "fra venstre" slik at forplantningsretningen, gitt ved bølgetallsvektoren $\mathbf{k}_i$, danner en vinkel θ_i med z -aksen. Innkommende bølge blir delvis reflektert, med bølgetallsvektor $\mathbf{k}_r$, og delvis transmittert (evt *refraktert*), med bølgetallsvektor $\mathbf{k}_t$, som vist i figuren.



Elektrisk feltvektor for de tre bølgene er

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_i &= \mathbf{E}_{i0} \cos(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t) \\ \mathbf{E}_r &= \mathbf{E}_{r0} \cos(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t) \\ \mathbf{E}_t &= \mathbf{E}_{t0} \cos(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t)\end{aligned}$$

Bølgetallsvektoren $\mathbf{k}_i$ kan uttrykkes i kartesiske koordinater,

$$\mathbf{k}_i = k_{ix}\hat{x} + k_{iy}\hat{y} + k_{iz}\hat{z}$$

og tilsvarende for $\mathbf{k}_r$ og $\mathbf{k}_t$.

a) Bruk av grensebetingelsene for $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$ i planet $z = 0$ (betingelser som skal gjelde overalt i dette planet, dvs for alle x og y og til alle tider t) vil resultere i ligninger på formen

$$A \cos(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t) + B \cos(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t) = C \cos(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

der koeffisientene A , B og C ikke avhenger av $\mathbf{r}$ og t . (Disse skal ikke bestemmes her.) Bruk dette til å argumentere for at

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}$$

for alle mulige posisjoner $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ i grenseflaten $z = 0$.

Argumenter videre for at vi da må ha

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}$$

og

$$k_{iy} = k_{ry} = k_{ty}$$

Men da har vi 3 vektorer med 2 av komponentene identiske, hvilket må bety at de 3 vektorene alle ligger i ett og samme plan. Vi ser dessuten at dette planet står vinkelrett på grenseflaten, hvilket må bety at flatenormalen til grenseflaten også ligger i samme plan som de 3 bølgetallsvektorene.

Dette er geometrisk optikk 1. lov:

Bølgetallsvektorene til innkommende, reflektert og transmittert bølge danner et plan, det såkalte *innfallsplanet*, som også inkluderer flatenormalen til grenseflaten.

b) La oss nå velge x - og y -aksene slik at $\mathbf{k}_i$ ligger i xz -planet. Vis at da er

$$k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r = k_t \sin \theta_t$$

og dermed

$$\theta_i = \theta_r$$

og

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

Dette er henholdsvis 2. lov (refleksjonsloven):

Innfallsvinkelen og refleksjonsvinkelen er like store: $\theta_i = \theta_r$.

Og 3. lov (brytningsloven, eller *Snells lov*):

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{n_1}{n_2}$$

Oppgave 3

(Denne oppgaven er dekket gjennom to av øvingene i FY1003/TFY4155 våren 2009. Du må selv vurdere behovet for å gjøre den her.)

Bruk Maxwells ligninger,

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} &= q_f \\ \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \\ \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} &= 0 \\ \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= I_f + \frac{d}{dt} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}\end{aligned}$$

til å utlede grenseflatebetingelsene $\Delta D_{\perp} = 0$, $\Delta E_{\parallel} = 0$, $\Delta B_{\perp} = 0$ og $\Delta H_{\parallel} = 0$ for en grenseflate uten fri ladning og strøm. Velg lukkede kurver og flater som antydnet i figuren nedenfor og la $h \rightarrow 0$.

