Institutt for fysikk, NTNU
TFY4160/FY1002: Bølgefysikk
Høsten 2006, uke 35

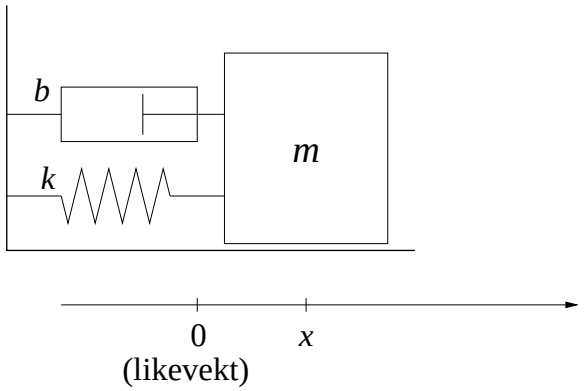
Mandag 28.08.06

Dempet harmonisk svingning
[FGT 13.7; YF 13.7; TM 14.4; AF 10.13; LL 9.7,9.8]

I praksis *dempes* frie svingninger pga friksjon, f.eks. luftmotstand. Vi *antar* her at dempingskraften F_d er proporsjonal med hastigheten v, og motsatt rettet denne:

$$\boldsymbol{F}_d = -b\,\boldsymbol{v}$$

Her er b en dempingskonstant, med dimensjon Ns/m. Merk at det *ikke* alltid er en god antakelse at dempingskraften er proporsjonal med hastigheten.



Total kraft på massen m når den er i posisjon x med hastighet $\dot{x}$ blir

$$-kx - b\dot{x}$$

hvoretter Newtons 2. lov gir bevegelsesligningen

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

Vi innfører $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ og $\delta = b/2m$ og får

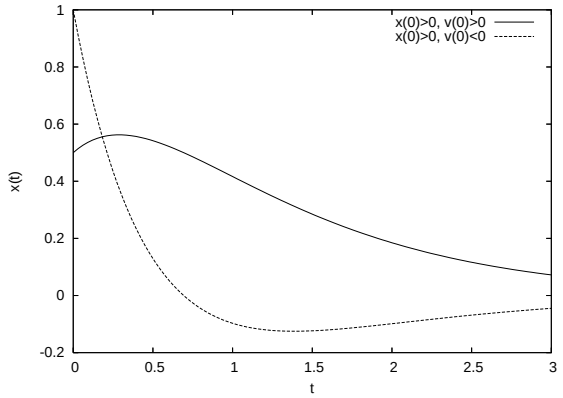
$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Dette er en 2. ordens homogen DL, der formen på løsningen avhenger av hvor sterk dempingen er:

1) $\delta > \omega_0$: overdempet system

$$x(t) = Ae^{-(\delta+\gamma)t} + Be^{-(\delta-\gamma)t}$$

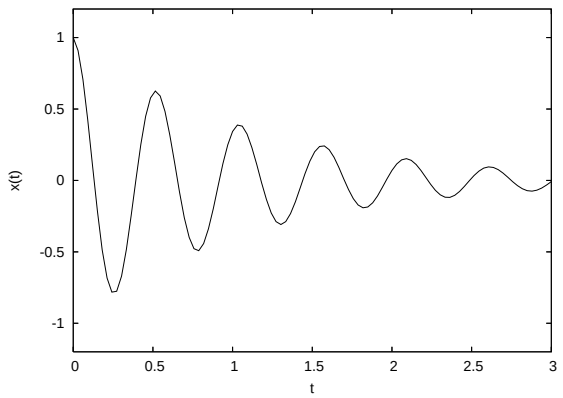
Her har vi innført $\gamma \equiv \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$, og A og B er to integrasjonskonstanter som fastlegges ved hjelp av to initialbetingelser, f.eks. posisjon og hastighet ved $t = 0$, dvs $x(0)$ og $\dot{x}(0)$. Et par eksempler, med ulike initialbetingelser, er vist i figuren nedenfor ($v = \dot{x}$).



2) $\delta < \omega_0$: underdempet system

$$x(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega t + \phi)$$

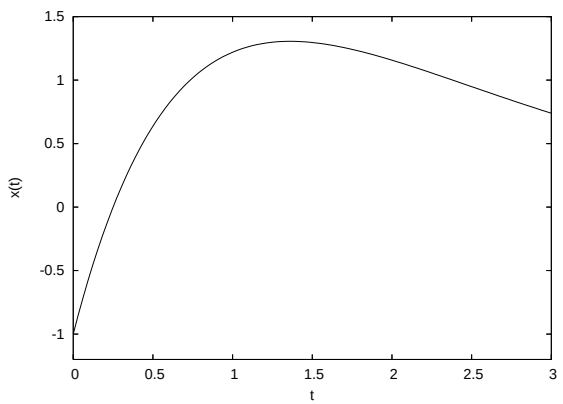
Her har vi innført $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, og A og ϕ er igjen to integrasjonskonstanter som må bestemmes ved hjelp av to initialbetingelser. Et eksempel er vist i figuren nedenfor, med $\delta = 0.9$, $\omega = 1$, $x(0) = 1$ og $\dot{x}(0) = -0.9$.



3) $\delta = \omega_0$: kritisk dempet system

$$x(t) = Ae^{-\delta t} + BtAe^{-\delta t}$$

Et eksempel er vist i figuren nedenfor, med $\delta = 0.9$, $x(0) = -1$ og $\dot{x}(0) = 4.9$.



Generell metode for å løse slike differensialligninger
Utsvinget $x(t)$ må være på formen

$$x(t) \sim e^{-zt}$$

fordi da vil også $\dot{x}$ og $\ddot{x}$ være på samme form, og det kan la seg gjøre å få venstre side av ligningen

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

til å bli lik null. Mulige verdier av parameteren z finner vi ved simpelthen å sette den antatte løsningen inn i ligningen. Vi har

$$x = e^{-zt} \qquad \dot{x} = -ze^{-zt} \qquad \ddot{x} = z^2 e^{-zt}$$

som gir, ved innsetting,

$$z^2 e^{-zt} - 2\delta z e^{-zt} + \omega_0^2 e^{-zt} = 0$$

Siden $\exp(-zt)$ er forskjellig fra null, må vi ha

$$z^2 - 2\delta z + \omega_0^2 = 0$$

som gir de to mulige verdiene for z:

$$z = \delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Dersom dempingen er tilstrekkelig sterk til at $\delta > \omega_0$, har vi to reelle løsninger for z, noe som umiddelbart gir løsningen for $x(t)$ beskrevet under *overdempet system* ovenfor. Dersom $\delta = \omega_0$, får vi to sammenfallende løsninger $z_1 = z_2 = \delta$, og i utgangspunktet bare den ene løsningen $x_1(t) = \exp(-\delta t)$. En løsning til, $x_2(t)$, bestemmes deretter ved hjelp av såkalt *variasjon av parametre*: Prøv $x_2(t) = u(t)x_1(t)$. Innsetting i bevegelsesligningen fører da til at vi må ha $\ddot{u} = 0$, som har $u(t) = t$ som løsning.
Dersom $\delta < \omega_0$, får vi to *komplekse* løsninger for z, ettersom $\sqrt{-1} = i$:

$$z = \delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \delta \pm i\omega$$

Ved å bruke Eulers formel,

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$$

er det nå en relativt smal sak å overbevise seg om at den generelle *reelle* løsning for $x(t)$ blir som beskrevet under *underdempet system* ovenfor.

Energitap i dempet svingning. Godhetsfaktor.

La oss betrakte et underdempet system (dvs $\delta < \omega_0$). Fra figuren ovenfor er det klart at systemet masse + fjær taper energi for hver periode av svingningen: Når utsvinget x er maksimalt, er hastigheten null, og total energi er lik potensiell energi. Og mindre maksimalutsving betyr mindre potensiell energi lagret i fjæra.
Vi kjenner $x(t)$ og kan dermed analysere dette energitapet.

$$x(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega t + \phi)$$

gir $x_{\max} = A\exp(-\delta t)$ og

$$E(t) = E_{p,\max}(t) = \frac{1}{2}kx_{\max}^2 = \frac{1}{2}kA^2e^{-2\delta t}$$

Relativt energitap pr periode blir

$$\frac{\Delta E(t)}{E(t)} = \frac{E(t) - E(t+T)}{E(t)} = 1 - e^{-2\delta T} = 1 - e^{-4\pi\delta/\omega}$$

altså uavhengig av t. Dersom dempingen er svak, dvs $\delta \ll \omega_0$, forenkler dette seg til

$$\frac{\Delta E}{E} \simeq \frac{4\pi\delta}{\omega_0}$$

for da er $\exp(-4\pi\delta/\omega) \simeq 1 - 4\pi\delta/\omega$. Svingesystemets *godhetsfaktor* Q (engelsk: *quality factor* eller *figure of merit*) defineres nå slik:

$$Q \equiv \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{m\omega_0}{b}$$

Dermed blir relativt energitap omvendt proporsjonalt med Q,

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2\pi}{Q},$$

for systemer med svak demping. Med andre ord, jo større verdi for Q, desto mindre er energitapet. Den tapte energien omdannes til *varme*.

Onsdag 30.08.06

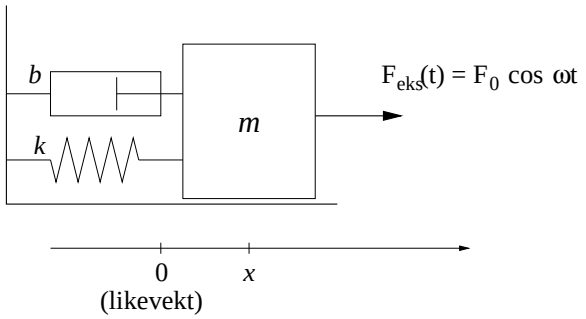
Tvungen svingning og resonans

[FGT 13.8; YF 13.8; TM 14.5; AF 10.14; LL 9.9,9.10]

Vi betrakter samme system som ovenfor, men med den forskjellen at vi lar en harmonisk ekstern kraft

$$F_{\text{eks}} = F_0 \cos\omega t$$

virke på massen m:



Total kraft på m er

$$-kx - b\dot{x} + F_0 \cos\omega t$$

så bevegelsesligningen (Newtons 2. lov) blir

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos\omega t$$

Dette er en 2. ordens inhomogen DL med generell løsning

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

der $x_h(t)$ er en generell løsning av den tilsvarende homogene DL, $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$ (se *Dempet svingning* ovenfor), mens $x_p(t)$ er en (vilkårlig) *partikulær* løsning av den inhomogene ligningen.
I en viss tid etter at vi har skrudd på den eksterne kraften vil selvsagt både x_h og x_p bidra til utsvingsforløpet $x(t)$. Men dersom vi antar at vi har ventet tilstrekkelig lenge (dvs inntil $t \gg 1/\delta$), kan vi sette $x_h \simeq 0$ ettersom x_h uansett vil inneholde faktoren $\exp(-\delta t)$. Dermed står vi igjen med $x(t) = x_p(t)$, og her er det ikke vanskelig å gjette seg til at x_p må være på formen $\sin \omega t$, eventuelt $\cos \omega t$. Vi kunne forsøke

$$x(t) = B_0 \sin \omega t + C_0 \cos \omega t$$

hvoretter innsetting i DL vil fastlegge B_0 og C_0 (dvs uttrykt ved gitte parametre m, b, k, F_0 og ω). Alternativt kan vi skrive løsningen på formen

$$x(t) = A_0 \sin(\omega t + \phi_0)$$

Innsetting i DL gir da

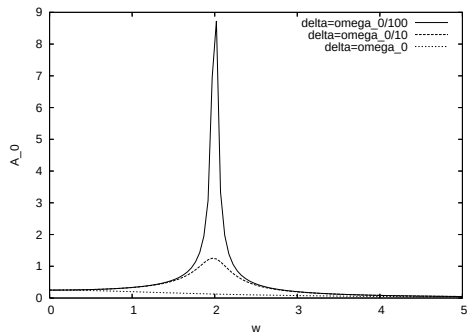
$$A_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + (b\omega/m)^2}} = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

for amplituden og

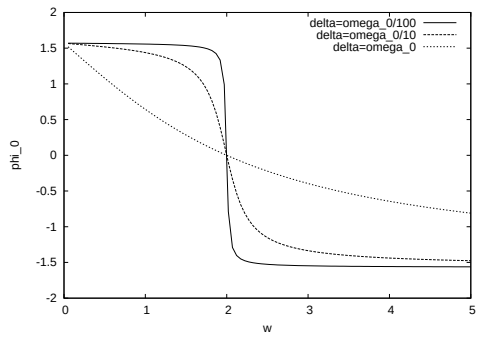
$$\tan \phi_0 = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega b/m} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\delta\omega}$$

for fasekonstanten. Her er, som før, $\omega_0^2 = k/m$ og $\delta = b/2m$.

Resonans
Vi ser at massen m vil svinge med en amplitude A_0 som avhenger av frekvensen ω på den ytre kraften. I figurene nedenfor er det vist noen eksempler, med henholdsvis liten ($\delta = \omega_0/100$), middels ($\delta = \omega_0/10$) og stor ($\delta = \omega_0$) demping. Amplituden A_0 er plottet som funksjon av ω, og for alle kurvene har vi $\omega_0 = 2$:



Tilhørende kurver for fasevinkelen ϕ_0 som funksjon av ω:



Her er det verdt å merke seg:

- Når den ytre kraften varierer med en frekvens ω (omtrent) lik systemets naturlige svingefrekvens ω_0, får vi størst amplitude på utsvinget $x(t)$. Vi sier at vi har *resonans*.
- Har vi et system helt uten demping, $\delta = 0$, vil $A_0(\omega_0) \to \infty$. Dette betyr at alt arbeidet som er utført av den ytre kraften F_{eks} har gått med til å øke oscillatorens energi. Og ettersom utgangspunktet var at vi hadde ventet en tid $t \gg 1/\delta$, som da innebærer $t \to \infty$, må det bety en uendelig mengde tilført energi, og naturlig nok en amplitude som går mot uendelig.
- Massens hastighet er $\dot{x}(t) = \omega A_0 \cos(\omega t + \phi_0)$. Når $\omega = \omega_0$, er fasevinkelen $\phi_0 = 0$, slik at $F_{\text{eks}}(t)$ og $\dot{x}(t)$ svinger *i fase*. Da ser vi at tilført effekt

  $$P(t) = F_{\text{eks}}(t) \cdot \dot{x}(t) = \omega A_0^2 \cos^2 \omega t$$

  hele tiden er en positiv størrelse, og *midlere* effekt $\langle P \rangle$ (midlet over en eller flere perioder) blir maksimal. Ikke uventet!
- Bredden på resonanskurven beskrives ved *halvverdibredden* $\Delta\omega$, og defineres som avstanden mellom de to verdiene av ω som gir $A_0 = A_0^{\max}/\sqrt{2}$. For systemer med svak demping, $\delta \ll \omega_0$, finner en

  $$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \simeq \frac{1}{Q}$$

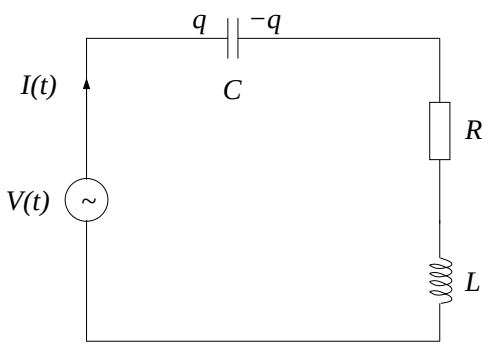
  der Q var den tidligere nevnte godhetsfaktoren (evt kvalitetsfaktoren). Videre har vi at amplituden på resonans, relativt til amplituden for lave verdier av ω, blir

  $$\frac{A_0(\omega_0)}{A_0(0)} = Q$$

  Med andre ord, resonanskurven er enten høy og smal eller lav og bred, men slik at produktet av høyde og bredde (som omtrent tilsvarer arealet under resonanskurven) er omtrent konstant.

Det er mange ulike fysiske systemer som oppviser resonans-egenskaper: barn i huske (pendel), elektroner i et atom, soldaters taktfaste marsjering over ei bru (google Angers og 1850) osv osv.

Et spesielt interessant eksempel er en RCL-krets, dvs en seriekobling av en motstand R, en kapasitans C og en induktans L, der strømmen drives av en vekselspenningskilde $V(t) = V_0 \cos \omega t$:



Bruk av Kirchhoffs spenningsregel (dvs: sum av alle spenningsfall rundt en lukket krets er lik null) gir ligningen

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = V_0 \cos \omega t$$

ettersom strømmen er $I = dq/dt$, slik at $dI/dt = d^2q/dt^2$. Fra før har vi ligningen

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

for det mekaniske svingesystemet. Men dette er jo helt tilsvarende ligninger! Med andre ord: Ladningen q på kondensatoren i RCL-kretsen svinger på samme måte som utsvinget x til massen i det mekaniske svingesystemet. Ved direkte sammenligning ser vi at m og L er *analoge* størrelser i de to systemene, og tilsvarende gjelder for k og $1/C$, for b og R, for F_0 og V_0 og for $\dot{x}$ (massens hastighet) og $\dot{q}$ (strømmen i kretsen). Og siden det mekaniske svingesystemet har egenfrekvensen $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, må den elektriske svingekretsen ha egenfrekvens $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$. Og dersom resistansen R er liten (tilsvarende liten demping b i det mekaniske systemet), vil vi få spesielt stor strømstyrke hvis spenningskilden svinger med frekvens (omtrent) lik egenfrekvensen $1/\sqrt{LC}$.
Resonanskurven kan også for den elektriske svingekretsen karakteriseres ved hjelp av godhetsfaktoren Q. Ettersom vi definerte $Q \equiv m\omega_0/b$ for det mekaniske systemet, finner vi nå

$$Q \equiv \frac{L \cdot 1/\sqrt{LC}}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$$