FY1002/TFY4160 Bølgefysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Desember 2008.

Løsningsforslag til oppgavene 1 – 8 fra spesiell relativitetsteori.

Oppgave 1

Vi lar $x_1 = x_2$ være posisjonen for hendelsene i inertialsystemet der de skjer på samme sted. Her er de adskilt tidsmessig med 4 s, så vi kan sette $t_2 = t_1 + 4$. I et annet system, $\overline{\text{S}}$, skjer hendelsene med en tidsforskjell på 6 s, så vi kan skrive $\overline{t}_2 = \overline{t}_1 + 6$. Det vi skal bestemme er den romlige separasjonen mellom hendelsene i $\overline{\text{S}}$, dvs $\overline{x}_2 - \overline{x}_1$.
Vi bruker lorentztransformasjonene og får:

$$\begin{aligned}\overline{x}_2 - \overline{x}_1 &= \gamma\left(x_2 - x_1 - v\left(t_2 - t_1\right)\right) = -4v\gamma \\ \overline{t}_2 - \overline{t}_1 &= \gamma\left(t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}\left(x_2 - x_1\right)\right) = 4\gamma = 6\end{aligned}$$

Fra dette finner vi at

$$\gamma^{-2} = 1 - v^2/c^2 = 4/9$$

dvs $v = \sqrt{5}c/3$. Dette settes inn i uttrykket for $\overline{x}_2 - \overline{x}_1$:

$$\overline{x}_2 - \overline{x}_1 = -4 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot c \cdot \frac{3}{2} = -6\sqrt{5} \cdot 10^8 \text{ m} \simeq -1.34 \cdot 10^9 \text{ m}$$

Minustegnet betyr ikke annet enn at dersom hendelse 2 skjer etter hendelse 1 i S og $\overline{\text{S}}$, slik vi her har antatt, vil hendelse 1 skje lenger ut i den positive retningen enn hendelse 2 i $\overline{\text{S}}$. Det høres fornuftig ut, siden $\overline{\text{S}}$pr antagelse har hastighet v i positiv x-retning, i forhold til S.

Oppgave 2

Her kan vi bruke samme framgangsmåte som i Oppgave 1. Vi bruker enheten km for romlige avstander, som betyr at tallverdien til c blir $3 \cdot 10^5$.

$$\begin{aligned}t_2 - t_1 &= 0 \\ x_2 - x_1 &= 1 \\ \overline{x}_2 - \overline{x}_1 &= \gamma\left(x_2 - x_1 - v\left(t_2 - t_1\right)\right) = \gamma = 2 \\ \overline{t}_2 - \overline{t}_1 &= \gamma\left(t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}\left(x_2 - x_1\right)\right) = -\gamma \cdot \frac{v}{c^2} \cdot 1\end{aligned}$$

Fra $\gamma = 2$ finner vi at $v = \sqrt{3}c/2$, som innsatt gir

$$\overline{t}_2 - \overline{t}_1 = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}/2}{3 \cdot 10^5} \simeq 5.77 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

Oppgave 3

a) Staven beveger seg med hastighet $v = \beta c = 0.8c$ og blir derfor kortere pga lorentzkontraksjon:

$$L = \overline{L}/\gamma = 1 \cdot \sqrt{1 - 0.8^2} = 0.6 \text{ m}$$

Følgelig er stavens to ender i ± 0.3 m.

b) Stavens midtpunkt *er* i origo ved $t = 0$. Lyset fra stavens midtpunkt bruker en tid $1\,\text{m}/c = 0.33 \cdot 10^{-8}$ s derfra og til øyet ditt.

c) Vi må finne ut: Hvor startet lyset fra hhv bakenden og forenden slik at det nådde fram til ditt øye på tidspunktet $0.33 \cdot 10^{-8}$ s?
La oss starte med bakenden. Ved $t = 0$ er bakenden ved -0.3 m, og ved $t = 0.33 \cdot 10^{-8}$ er den ved +0.5 m. På denne tiden reiser lyset nøyaktig 1 m, som er kortere enn avstanden fra $(-0.3, 0)$ til $(0, 1)$. Altså er det klart at lyset fra bakenden må starte tidligere enn $t = 0$ for å nå fram til ditt øye ved $t = 0.33 \cdot 10^{-8}$. La oss sette starttidspunktet lik $t = -\tau$. På tiden τ reiser stavens bakende en lengde $0.8c\tau$. Det må bety at bakenden var i posisjonen $(-0.3 - 0.8c\tau, 0)$ ved starttidspunktet $-\tau$. Fra denne posisjonen til ditt øye må avstanden være $c\tau + 1$ (dvs meter), ettersom lyset jo skal bruke en totaltid $\tau + 0.33 \cdot 10^{-8}$ på denne strekningen. Bruk av Pythagoras gir da

$$(c\tau + 1)^2 = 1^2 + (-0.3 - 0.8c\tau)^2$$

dvs $c\tau \simeq 0.0584$ m. Altså ser det ut som om bakenden er i posisjonen $-0.3 - 0.8c\tau \simeq -0.35$ m ved tidspunktet $t = 0.33 \cdot 10^{-8}$ s.
Tilsvarende betraktninger kan gjøres for stavens forende: Ved $t = 0$ er forenden ved 0.3 m, og ved $t = 0.33 \cdot 10^{-8}$ er den ved +1.1 m. På denne tiden reiser lyset 1 m, som er kortere enn avstanden fra $(0.3, 0)$ til ditt øye i $(0, 1)$. Igjen er det klart at lyset fra forenden må starte tidligere enn $t = 0$ for å komme fram til ditt øye ved $t = 0.33 \cdot 10^{-8}$. Vi setter starttidspunktet lik $t = -\tau'$. På tiden τ' reiser stavens forende en lengde $0.8c\tau'$, som betyr at forenden var i posisjonen $(0.3 - 0.8c\tau', 0)$ ved $t = -\tau'$. Herfra til ditt øye må avstanden være $c\tau' + 1$ (meter), da lyset skal bruke totaltiden $\tau' + 0.33 \cdot 10^{-8}$ på denne strekningen. Pythagoras gir

$$(c\tau' + 1)^2 = 1^2 + (0.3 - 0.8c\tau')^2$$

dvs $c\tau' \simeq 0.036$ m. Altså ser det ut som om forenden er i posisjonen $0.3 - 0.8c\tau' \simeq 0.27$ m ved tidspunktet $t = 0.33 \cdot 10^{-8}$ s.
Med andre ord: Vi *ser* en stav med lengde 62 cm ved $t = 0.33 \cdot 10^{-8}$ s, og hadde vi ikke f.eks. satt et lite merke på stavens midtpunkt, hadde det sett ut som om stavens midtpunkt nå var litt til venstre for origo. Men med et merke på stavens midtpunkt, ser vi dette i origo, som betyr at stavens bakre halvdel ser litt lenger ut enn den fremre halvdelen.
Men dette er altså hva vi *ser*, og ikke hva vi *måler*.

Oppgave 4

a) Vi må finne nøytronets hastighet. Vi har $E = \gamma mc^2$, som løst mhp v gir

$$v = c\sqrt{1 - (mc^2/E)^2}$$

Nøytronets masse er ca $1.67 \cdot 10^{-27}$ kg, dvs

$$mc^2 = 1.67 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} \simeq 1.5 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

som er ca $9.39 \cdot 10^8$ eV. Dermed er

$$v = c\sqrt{1 - (9.39 \cdot 10^8/10^{19})^2} \simeq c$$

Med en hastighet omtrent lik c tar det 1 år å reise en avstand 1 lysår, så målt i galaksesystemet tar det 100000 år for nøytronet å krysse galaksen.

b) Pga tidsdilatasjon går nøytronets klokke betydelig saktere enn "galakseklokka". Lorentzfaktoren er

$$\gamma = E/mc^2 \simeq 10^{19}/9.39 \cdot 10^8 \simeq 1.06 \cdot 10^{10}$$

Dermed tar hele reisen, målt i nøytronets hvilesystem, bare en tid

$$10^5 \text{ aar}/\gamma \simeq 9.39 \cdot 10^{-6} \text{ aar} = 3.43 \cdot 10^{-3} \text{ dager} = 0.082 \text{ timer} = 4.94 \text{ min} \simeq 5 \text{ min}$$

Oppgave 5

a) Målt i romskipet, dvs S', må lyset tilbakelegge lengden L_0 for å komme fram til romskipets bakende, og siden lyset alltid reiser med hastighet c, tar dette en tid L_0/c.

b) Her må vi ta hensyn til to ting: For det første er romskipets lengde bare L_0/γ målt i S pga lorentzkontraksjon. For det andre beveger romskipet seg i S, så det kommer lyspulsen i møte. La oss velge $x = 0$ i posisjonen A. Ved tid t_1 er da bakenden i posisjon $-L_0/\gamma + vt_1$. På strekningen fra $x = 0$ til $x = -L_0/\gamma + vt_1$ bruker lyset tiden t_1, så denne strekningen tilsvarer ct_1. Følgelig:

$$ct_1 + vt_1 = L_0/\gamma$$

Denne ligningen løses greit mhp t_1, og vi finner

$$t_1 = \frac{L_0\sqrt{1-\beta^2}}{c(1+\beta)} = \frac{L_0}{c}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

med $\beta = v/c$.

c) Romskipets bakre ende starter en avstand L_0/γ til venstre for posisjonen A og beveger seg med hastighet v mot høyre. Da er det klart at det tar en tid

$$t_2 = \frac{L_0}{\gamma v}$$

før bakenden passerer posisjonen A.

Oppgave 6

a) Det er klart at $|v_{AB}| = |v_{BA}| = 0.7c$.

b) Her kan vi bruke Einsteins formel for addisjon av hastigheter:

$$v_{BC} = \frac{v_{BA} + v_{AC}}{1 + v_{BA}v_{AC}/c^2} = \frac{0.7c + 0.7c}{1 + 0.7^2} = 0.94c$$

Oppgave 7

Vi kaller laboratoriesystemet for L og regner ut hastigheten til B målt i A's system:

$$v = v_{BA} = \frac{v_{BL} + v_{LA}}{1 + v_{BL}v_{LA}/c^2} = \frac{-\beta c - \beta c}{1 + \beta^2} = -\frac{2\beta c}{1 + \beta^2}$$

Dermed er

$$\gamma^{-2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{4\beta^2}{(1 + \beta^2)^2} = \frac{(1 - \beta^2)^2}{(1 + \beta^2)^2},$$

dvs

$$\gamma = (1 + \beta^2)(1 - \beta^2)^{-1}.$$

Siden en partikkels totale energi er $E = \gamma mc^2$, følger det at

$$E = mc^2 \left(1 + \beta^2\right) \left(1 - \beta^2\right)^{-1}$$

Oppgave 8

a) Systemets totale energi blir ganske enkelt summen av energiene til hvert foton, 100 MeV + 200 MeV = 300 MeV. (Energi er jo en skalar størrelse.)

b) Fotoner er masseløse partikler, slik at vi har sammenhengen $E = pc$ mellom fotonets energi E og (absoluttverdien av) dets impuls p. Hvis vi f.eks. kaller fotonet som beveger seg langs x for nr 1 og det som beveger seg langs y for nr 2, har vi følgelig $p_1 = E_1/c = 200$ MeV$/c$ og $p_2 = E_2/c = 100$ MeV$/c$. Så må vi huske på at impulsen er en vektorstørrelse, slik at systemets totale impuls blir

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} \cdot 100\ \mathrm{MeV}/c = \sqrt{5} \cdot 100\ \mathrm{MeV}/c$$

c) Vi skal finne massen til en partikkel som har energi 300 MeV og impuls $\sqrt{5} \cdot 100$ MeV$/c$. Da kan vi ganske enkelt benytte sammenhengen

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

som gir

$$m = \sqrt{E^2 - (pc)^2}/c^2 = \sqrt{9-5} \cdot 100\ \mathrm{MeV}/c^2 = 200\ \mathrm{MeV}/c^2$$

d) Relativistisk impuls er $p = \gamma m v$, som gir

$$v^2 = (p/\gamma m)^2 = (1 - v^2/c^2)(p/m)^2 = (p/m)^2 - v^2(p/mc)^2$$

dvs

$$v = \sqrt{\frac{(p/m)^2}{1 + (p/mc)^2}} = c \cdot \frac{pc/mc^2}{\sqrt{1 + (pc/mc^2)^2}} = c \cdot \frac{\sqrt{5} \cdot 100/200}{\sqrt{1 + (\sqrt{5} \cdot 100/200)^2}} = c \cdot \frac{\sqrt{5}/2}{\sqrt{1 + 5/4}} = \sqrt{5}c/3$$

Siden forholdet mellom p_y og p_x, og dermed også forholdet mellom v_y og v_x, er 0.5, blir retningen i en vinkel $\arctan 0.5$ i forhold til x-aksen.