FY1002/TFY4160 Bølgefysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2010.

Løsningsforslag til øving 13

Oppgave 1

Myonets totale energi er $E_\mu = \gamma mc^2 = 2{\cdot}10^9$ eV, mens dets hvileenergi er $E_\mu^0 = mc^2 = 105.7{\cdot}10^6$ eV. Det betyr at lorentzfaktoren er

$$\gamma = \frac{E_\mu}{E_\mu^0} = 18.92$$

Myonets hastighet er dermed

$$v = c\sqrt{1 - 1/\gamma^2} = 0.9986\, c$$

Den oppgitte levetiden på 2.2 μs gjelder for myoner med lave hastigheter. Observert fra jorda vil dermed et myon med hastighet $0.9986\, c$ ha en levetid

$$\Delta t = \gamma \Delta \bar{t} = 18.92 \cdot 2.2 \mu\text{s} = 41.6 \mu\text{s}$$

På denne tiden reiser myonet en avstand

$$\Delta x = v\Delta t = 12.5\,\text{km}$$

som er av samme størrelsesorden som avstanden fra jorda og opp til de øvre deler av atmosfæren, der myonet ble dannet.

Oppgave 2

a) Da pionet ligger i ro ($v_\pi = 0$), er total energi

$$E_{\text{tot}} = m_\pi c^2,$$

dvs pionets hvileenergi. Energibevarelse gir dermed

$$m_\pi c^2 = E_\mu + E_\nu,$$

der E_μ og E_ν er hhv myonets og nøytrinoets energi. Nøytrinoets masse antas å være omtrent lik null, slik at

$$E_\nu = p_\nu c,$$

der p_ν er nøytrinoets impuls. Myonets energi er

$$E_\mu = \sqrt{p_\mu^2 c^2 + m_\mu^2 c^4}.$$

Systemets totale impuls er lik null (siden pionet lå i ro), så impulsbevarelse gir

$$\boldsymbol{p}_\nu + \boldsymbol{p}_\mu = 0.$$

Altså er myonets og nøytrinoets impulser like store i absoluttverdi,

$$p_\nu = p_\mu = p.$$

Vi har videre

$$E_\nu = pc = \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4},$$

slik at

$$m_\pi c^2 = E_\mu + \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4}.$$

Løser vi denne ligningen mhp E_μ, finner vi

$$E_\mu = \frac{\left(m_\pi^2 + m_\mu^2\right) c^2}{2m_\pi}$$

b) Vi har

$$p = E_\nu/c = \frac{1}{c}\left(m_\pi c^2 - E_\mu\right) = \frac{c}{2}\left(m_\pi - \frac{m_\mu^2}{m_\pi}\right)$$

Sammenhengen mellom myonets impuls p og hastighet v_μ er

$$p = \frac{m_\mu v_\mu}{\sqrt{1 - v_\mu^2/c^2}}.$$

Kombinasjon av disse to ligningene gir

$$\frac{m_\mu v_\mu}{\sqrt{1 - v_\mu^2/c^2}} = \frac{c}{2}\left(m_\pi - \frac{m_\mu^2}{m_\pi}\right),$$

og løsning av denne lignignen mhp v_μ gir

$$v_\mu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2}\, c$$

Tallverdier: $E_\mu = 109.78$ MeV, $v_\mu/c = 0.27$.

Oppgave 3

La S være inertialsystemet der $pc = 3$ (GeV) og $\overline{\mathrm{S}}$ systemet der $\overline{p}c = 4$. Partikkelens totale energi i S er $E = 5$.

a) Partikkelens hvileenergi er (ved hjelp av den nyttige sammenhengen $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$)

$$mc^2 = \sqrt{E^2 - p^2c^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$$

(nok en gang: i enheten GeV). Dermed er partikkelens totale energi i $\overline{\mathrm{S}}$

$$\overline{E} = \sqrt{\overline{p}^2c^2 + m^2c^4} = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2} \simeq 5.66.$$

(Merk: I et *gitt* system er total energi *bevart*, dvs total energi endres ikke i en kollisjon, en fusjonsprosess, en fisjonsprosess e.l. Men: Total energi er *ikke en invariant størrelse*, dvs ikke den samme i ulike inertialsystemer S og $\overline{\mathrm{S}}$.)

b) Vi regnet ut hvileenergien i punkt *a*). Partikkelens masse er dermed

$$m = 4\ \mathrm{GeV}/c^2 = 7.11 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \simeq 4.3u.$$

c) Sammenhengen mellom relativistisk impuls p og hastighet v er

$$p = \gamma m v,$$

med lorentzfaktoren $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. (Alle hastigheter foregår her langs en og samme akse, så vi kan droppe vektorsymboler.) Løsning av ligningen over med hensyn på v gir

$$v = c \cdot \frac{pc}{\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}} = c \cdot \frac{pc}{E} = \frac{3c}{5}.$$

Tilsvarende,

$$\overline{v} = c \cdot \frac{\overline{p}c}{\overline{E}} = \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Einsteins addisjonsformel,

$$\overline{v} = \frac{u + v}{1 + uv/c^2},$$

gir til slutt

$$u = \frac{\overline{v} - v}{1 - \overline{v}v/c^2} = \frac{5 - 3\sqrt{2}}{5\sqrt{2} - 3} c \simeq 0.186c.$$

Oppgave 4

Her studerer vi en fullstendig uelastisk kollisjon mellom en partikkel med masse m og kinetisk energi $2mc^2$, og en partikkel i ro med masse $2m$. Vi har bruk for systemets totale impuls:

$$pc = \sqrt{(3mc^2)^2 - (mc^2)^2} = \sqrt{8}mc^2.$$

Her har vi brukt at partikkelen med masse m har hvileenergi mc^2, og dermed total energi $3mc^2$. Systemets totale energi er

$$E = 3mc^2 + 2mc^2 = 5mc^2.$$

Verken total impuls eller total energi endres i kollisjonen. Dermed må vi ha sammenhengen

$$(5mc^2)^2 = (\sqrt{8}mc^2)^2 + M^2c^4,$$

dvs

$$M = \sqrt{17}m \simeq 4.1m.$$

Oppgave 5

a) La oss f.eks. legge positiv x-akse mot øst og positiv y-akse mot nord. Videre kan vi si at partikkelen som farer mot vest (dvs negativ x-retning) er nr 1 og at den som farer mot sør (dvs negativ y-retning) er nr 2. Det er da klart, pga impulsbevarelse (total impuls er lik null), at partikkel nr 3 må ha retning mot nordøst, dvs med hastighet med positiv x- og y-komponent. Vi kaller vinkelen mellom positiv x-akse og $\boldsymbol{p}_3$ for θ. Da gir impulsbevarelse at

$$\begin{aligned} p_1 &= p_{3x} = p_3 \cos\theta \\ p_2 &= p_{3y} = p_3 \sin\theta \\ p_3^2 &= p_1^2 + p_2^2 \end{aligned}$$

Vi trenger p_1 og p_2:

$$\begin{aligned} p_1 &= \gamma_1 m v_1 = \frac{4mc/5}{\sqrt{1-16/25}} = \frac{4}{3}mc \\ p_2 &= \gamma_2 m v_2 = \frac{3mc/5}{\sqrt{1-9/25}} = \frac{3}{4}mc \end{aligned}$$

Dermed:

$$p_3^2 = p_1^2 + p_2^2 = (mc)^2(16/9 + 9/16) = 337(mc)^2/144.$$

Samtidig har vi

$$p_3^2 = \gamma_3^2 m^2 v_3^2,$$

som løst mhp v_3^2 gir

$$v_3^2 = c^2 \frac{p_3^2 c^2}{m^2c^4 + p_3^2c^2} \simeq 0.701c^2,$$

dvs

$$v_3 \simeq 0.837c.$$

Retningen til partikkel 3 er gitt ved at $\tan\theta = p_2/p_1$, dvs

$$\theta = \arctan(p_2/p_1) = \arctan(9/16) \simeq 29^\circ.$$

b) Vi bruker energibevarelse til å fastlegge masseforholdet M/m. Total energi er Mc^2, siden partikkelen er i ro i utgangspunktet. Energien til hver av de tre partiklene etter spaltingen er

$$E_j = \sqrt{p_j^2c^2 + m^2c^4} \quad , \quad j = 1, 2, 3.$$

Følgelig:

$$M = \left(\sqrt{16/9+1} + \sqrt{9/16+1} + \sqrt{337/144+1}\right) m \simeq 4.74m.$$