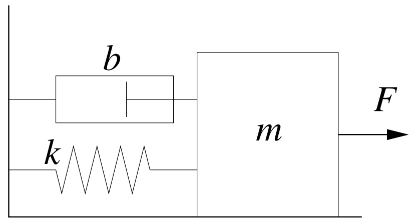
FY1002/TFY4160 Bølgefysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2010.

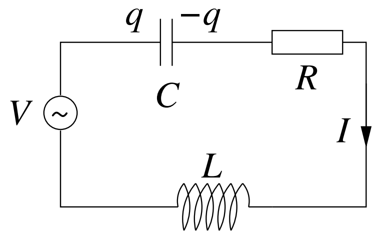
Veiledning: Tirsdag 7. og onsdag 8. september. Innleveringsfrist: Mandag 13. september kl 12:00.

Øving 2

A



B



a) I forelesningene har vi sett at det mekaniske svingesystemet i figur A ovenfor, med $F(t) = F_0 \cos \omega t$, oppfyller bevegelsesligningen

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t,$$

der x representerer massens utsving i forhold til likevektsposisjonen $x = 0$.
Vis at Kirchhoffs spenningsregel anvendt på den elektriske svingekretsen i figur B, med $V(t) = V_0 \cos \omega t$, gir en tilsvarende differensialligning,

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = V_0 \cos \omega t,$$

for ladningen q på kondensatoren.
Ved direkte sammenligning ser en at selvinduktansen L i det elektriske svingesystemet er *analog* til massen m i det mekaniske svingesystemet. (Ikke urimelig: m representerer treghet i det mekaniske systemet, dvs en motstand mot endringer i hastigheten; L representerer treghet i det elektriske systemet, dvs en motstand mot endringer i strømstyrken.)
Hva er den elektriske svingekretsens analogier til størrelsene b, k, F_0, x og $\dot{x}$ i det mekaniske systemet?

b) Siden den elektriske kretsen er "analog" til det mekaniske systemet, må ladningen på kondensatoren kunne skrives på formen

$$q(t) = q_0 \sin(\omega t - \alpha),$$

der vi antar at spenningskilden har stått på så lenge at en eventuell homogen løsning $q_h(t)$ av den tilsvarende homogene ligningen kan neglisjeres. (I forelesningene skrev vi $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ for utsvinget til massen m i det mekaniske svingesystemet. Vi har med andre ord her valgt motsatt fortegn på fasekonstanten α i uttrykket for ladningen $q(t)$. Dette er i tråd med det som vanligvis gjøres i forbindelse med elektriske svingekretser.)
Sett inn det oppgitte uttrykket for $q(t)$ i differensialligningen og vis at amplituden blir

$$q_0 = \frac{V_0}{\omega\sqrt{R^2 + X^2}},$$

mens fasekonstanten er gitt ved

$$\alpha = \arctan\left(\frac{X}{R}\right).$$

Her er $X = \omega L - 1/\omega C$ den såkalte *reaktansen* til den elektriske svingekretsen.

Anta at kretsen har følgende komponenter: $V_0 = 10$ V, $R = 1.0\,\Omega$, $L = 0.1$ mH, $C = 10$ nF. Hva blir da halvverdibredden $\Delta\omega$ for resonanskurven $q_0(\omega)$? Hva blir kretsens Q-verdi ("godhetsfaktor") $Q = \omega_0/\Delta\omega$?

Tegn opp ladningsamplituden q_0, strømamplituden ωq_0 og fasevinkelen α som funksjoner av vinkelfrekvensen ω. (Tips: Bruk f.eks. MATLAB, Octave eller gnuplot til å plotte disse tre funksjonene. Velg plotteintervall for ω slik at resonanstoppen kommer tydelig fram, og uten at den blir altfor smal på grafene.)

Tips:

Spenningsfall over motstand: RI; over kondensator: q/C; over induktans: $L\dot{I}$.

Du vil trolig få bruk for uttrykkene for sinus og cosinus til differansen mellom to vinkler. Videre kan det være lurt å tegne opp en rettvinklet trekant med utgangspunkt i at $\tan\alpha = X/R$, med tanke på at du har bruk for uttrykk for både $\sin\alpha$ og $\cos\alpha$.

c) Vi betrakter nå frie og svakt dempede svingninger i det mekaniske systemet i figur A (dvs $F = 0$ og $b/2m \equiv \delta \ll \omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$). Regn ut relativt energitap pr periode,

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E(t) - E(t+T)}{E(t)},$$

og vis at godhetsfaktoren blir den samme, enten den defineres som $Q \equiv 2\pi E/\Delta E$, eller som $Q \equiv \omega_0/\Delta\omega$ (der $\Delta\omega = 2\delta$ er resonanstoppens halvverdibredde ved tvungne svingninger, som ovenfor). Tips: $\exp(-z) \simeq 1 - z$ dersom $|z| \ll 1$.

d) Vis at (midlere) tilført effekt,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T F_0 \cos \omega t \dot{x}(t) dt,$$

tilsvarer (midlere) tapt effekt på grunn av demping,

$$\langle P_d \rangle = \langle F_d \dot{x} \rangle = \langle b \dot{x}^2 \rangle,$$

i det mekaniske systemet i figur A.