FY1002/TFY4160 Bølgefysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2009.

Løsningsforslag til øving 5

Oppgave 1

a) Svar C er korrekt. Fasehastigheten er gitt ved

$$v = \frac{\omega}{k}$$

og vi ser fra figuren at dette forholdet er størst for små verdier av k, dvs for lange bølgelengder.

b) Svar B er korrekt. Bølgehastigheten er gitt ved

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

slik at en endring i S til $S + \Delta S$ gir hastigheten

$$\begin{aligned} v' &= \sqrt{\frac{S+\Delta S}{\mu}} = \sqrt{\frac{S(1+\Delta S/S)}{\mu}} \\ &= \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot \sqrt{1+\Delta S/S} \simeq \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot (1 + \Delta S/2S) = v \cdot (1 + \Delta S/2S) \end{aligned}$$

Følgelig er

$$\Delta v = v' - v = v\Delta S/2S$$

c) Svar A er korrekt. Bølgehastigheten er gitt ved

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

slik at en endring i μ til $\mu + \Delta\mu$ gir hastigheten

$$\begin{aligned} v' &= \sqrt{\frac{S}{\mu+\Delta\mu}} = \sqrt{\frac{S}{\mu(1+\Delta\mu/\mu)}} \\ &= \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\Delta\mu/\mu}} \simeq \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot (1 - \Delta\mu/2\mu) = v \cdot (1 - \Delta\mu/2\mu) \end{aligned}$$

Følgelig er

$$\Delta v = v' - v = -v\Delta\mu/2\mu$$

d) B

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= 10 \log \frac{I_1}{I_0} \\
\Rightarrow \frac{\beta_1}{10} &= \log I_1 - \log I_0 \\
\beta_2 &= 10 \log \frac{I_2}{I_0} = \beta_1 + 5 \\
\Rightarrow \frac{\beta_1}{10} + \frac{1}{2} &= \log I_2 - \log I_0 \\
\Rightarrow \log I_2 - \log I_1 &= \frac{1}{2} \\
\Rightarrow \frac{I_2}{I_1} &= 10^{1/2} \simeq 3.16
\end{aligned}
$$

e) C
Intensiteten er proporsjonal med utsvingsamplituden kvadrert, mens trykkamplituden er proporsjonal med utsvingsamplituden. Dermed blir intensiteten proporsjonal med trykkamplituden kvadrert, og vi finner

$$
\frac{p_2}{p_1} = \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} = 10^{1/4} \simeq 1.78
$$

f) D

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{P}{A_{\text{halvkule}}} = \frac{P}{2\pi r^2} = \frac{0.2}{2\pi \cdot 4^2} \simeq 2.0 \text{ mW/m}^2 \\
\Rightarrow \beta &= 10 \log \frac{2.0 \cdot 10^{-3}}{10^{-12}} = 93 \text{ dB}
\end{aligned}
$$

Oppgave 2

a) Bølgelengden:

$$
\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{330}{1000} \, \text{m} = 33 \, \text{cm}
$$

Intensitetsnivået β målt i dB er definert ved

$$
\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}
$$

der referanseintensiteten $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2. Med $I = 10^{-9}$ W/m^2 har vi

$$
\beta = 10 \log \frac{10^{-9}}{10^{-12}} = 10 \cdot 3 = 30 \text{ dB}
$$

Intensiteten I tilsvarer en (midlere) effekt P pr flateenhet A. Vi anslår trommehinnens areal til f.eks. 0.5 cm^2. Effekten som mottas på en slik flate blir dermed

$$P = I \cdot A = 10^{-9}\ \mathrm{W/m^2} \cdot 0.5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^2} = 5 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{W}$$

(som er under forutsetning av at lydbølgen faller normalt inn mot trommehinnen.)

b) Sammenhengen mellom intensiteten I og utsvingsamplituden ξ_0 har vi utledet i forelesningene:

$$I = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2 v$$

Her er ρ massetettheten, ω er vinkelfrekvensen, og v er bølgehastigheten. Dermed:

$$\xi_0 = \frac{1}{2\pi\nu}\sqrt{\frac{2I}{\rho v}} = \frac{1}{2000\pi}\sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-9}}{1.3 \cdot 330}}\,\mathrm{m} \simeq 0.34\,\mathrm{nm}$$

Utsvinget er altså her av samme størrelsesorden som molekylenes utstrekning.
Trykkendringen Δp er relatert til utsvinget ξ (se forelesningene):

$$\Delta p = -\gamma p \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Med en plan harmonisk bølge får vi

$$\Delta p(x,t) = -\gamma p k \xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

med amplitude

$$(\Delta p)_0 = \gamma p k \xi_0 = \frac{7}{5} \cdot 10^5 \cdot \frac{2\pi}{0.33} \cdot 0.34 \cdot 10^{-9} \simeq 0.9\ \mathrm{mPa}$$

Relativ trykkvariasjon i forhold til likevektstrykket p blir

$$\frac{(\Delta p)_0}{p} = \frac{0.9 \cdot 10^{-3}}{10^5} = 9 \cdot 10^{-9}$$

Ikke rare greiene!

c) Fra tilstandsligningen for ideell gass, $pV = Nk_BT$ får vi

$$\begin{aligned}
\Delta p &= \Delta\left(\frac{Nk_BT}{V}\right) \\
&= \frac{Nk_B}{V}\Delta T - Nk_BT\frac{\Delta V}{V^2} \\
&= \frac{Nk_BT}{V}\frac{\Delta T}{T} - \frac{Nk_BT}{V}\frac{\Delta V}{V} \\
&= p\,\frac{\Delta T}{T} - p\,\frac{\Delta V}{V}
\end{aligned}$$

Som ventet: En trykkøkning ($\Delta p > 0$) ledsages både av en temperaturøkning ($\Delta T > 0$) og en volumreduksjon ($\Delta V < 0$). Det som gjenstår er å finne ut hvor store ΔT og ΔV er hver for seg. Det får vi til ved å benytte oss av antagelsen om adiabatiske forhold, nemlig

$$pV^\gamma = \text{konstant}$$

Det medfører at

$$\Delta p = -\gamma p \frac{\Delta V}{V}$$

eller

$$-\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{\gamma}\frac{\Delta p}{p}$$

som innsatt i uttrykket ovenfor for Δp gir

$$\Delta p = p\,\frac{\Delta T}{T} + \frac{1}{\gamma}\Delta p$$

og endelig

$$\frac{\Delta T}{T} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{\Delta p}{p}$$

Med andre ord: Temperaturvariasjonen $\Delta T(x,t)$ forplanter seg, på tilsvarende vis som $\Delta p(x,t)$, som en bølge med amplitude

$$(\Delta T)_0 = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{p}(\Delta p)_0$$

Den relative temperaturvariasjonen blir

$$\frac{(\Delta T)_0}{T} = \left(1 - \frac{5}{7}\right) \cdot 9 \cdot 10^{-9} \simeq 3 \cdot 10^{-9}$$

Absolutt temperaturvariasjon blir

$$(\Delta T)_0 \simeq 1\mu\mathrm{K}$$

Heller ikke rare greiene.

Siden $pV = Nk_BT$, har vi $\rho = N/V = p/k_BT$ for antallstettheten i gassen. Dermed:

$$\begin{aligned}
\Delta\rho &= \Delta(p/k_BT) = \Delta p/k_BT - p\Delta T/k_BT^2 \\
&= \rho\left(\Delta p/p - \Delta T/T\right) \\
&= \rho\left(\Delta p/p - (1 - 1/\gamma)\,\Delta p/p\right) \\
&= \rho\Delta p/\gamma p
\end{aligned}$$

Amplituden til antallstetthetbølgen blir da:

$$\begin{aligned}
(\Delta\rho)_0 &= \rho\,(\Delta p)_0\,/\gamma p \\
&= (p/k_BT)\cdot(\Delta p)_0\,/\gamma p \\
&= \left(10^5/1.38\cdot 10^{-23}\cdot 295\right)\cdot\left(9\cdot 10^{-9}\cdot 5/7\right) \\
&= 1.6\cdot 10^{17}\,\mathrm{m}^{-3} \\
&= 2.7\cdot 10^{-10}\,\mathrm{mol/L}
\end{aligned}$$

Oppgave 3

a) Det mest nærliggende er å derivere den gitte løsningen to ganger mhp t og r og sette inn i bølgeligningen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\xi}{\partial r} &= \frac{k\cos(kr-\omega t)}{r} - \frac{\sin(kr-\omega t)}{r^2} \\
\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2} &= -\frac{k^2\sin(kr-\omega t)}{r} - \frac{2k\cos(kr-\omega t)}{r^2} + \frac{2\sin(kr-\omega t)}{r^3} \\
\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= -\frac{\omega^2\sin(kr-\omega t)}{r}
\end{aligned}$$

Her har vi tatt vekk konstanten A overalt, siden vi ser at alle leddene i bølgeligningen er lineære i ξ. Vi bruker deretter at $v^2 = \omega^2/k^2$, hvoretter innsetting av de nødvendige deriverte gir at ligningen er oppfylt med den gitte formen på $\xi(r,t)$.

En alternativ framgangsmåte tar utgangspunkt i at

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\xi) = r\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2} + 2\frac{\partial\xi}{\partial r}$$

som betyr at den oppgitte bølgeligningen kan skrives på formen

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\xi) = v^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\xi)$$

Men dette er jo nettopp bølgeligningen i *en* dimensjon r, der $r\xi$ nå representerer den endimensjonale bølgen. Og fra den oppgitte formen på $\xi(r,t)$ har vi at

$$r\xi = A\sin(kr-\omega t)$$

og vi vet jo godt at en slik enkel harmonisk bølge er løsning av den endimensjonale bølgeligningen!

b) La oss gå fram på tilsvarende vis som i oppgave *a*), dvs vi regner ut de nødvendige deriverte av ξ, setter inn i bølgeligningen og ser hva vi får. (Også her stryker vi konstanten A.)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\xi}{\partial r} &= \frac{k\cos(kr-\omega t)}{r^{1/2}} - \frac{\sin(kr-\omega t)}{2r^{3/2}} \\
\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2} &= -\frac{k^2\sin(kr-\omega t)}{r^{1/2}} - \frac{k\cos(kr-\omega t)}{r^{3/2}} + \frac{3\sin(kr-\omega t)}{4r^{5/2}} \\
\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= -\frac{\omega^2\sin(kr-\omega t)}{r^{1/2}}
\end{aligned}$$

Med $v^2 = \omega^2/k^2$ gir innsetting i den gitte bølgeligningen

$$-\frac{\omega^2\sin(kr-\omega t)}{r^{1/2}} = -\frac{\omega^2\sin(kr-\omega t)}{r^{1/2}} + \frac{\omega^2\sin(kr-\omega t)}{4k^2r^{5/2}}$$

Dermed innser vi at den gitte $\xi(r,t)$ ikke er en eksakt løsning av bølgeligningen, pga ledd nummer to på høyre side. Vi innser også at den gitte $\xi(r,t)$ vil være en god tilnærmet løsning dersom ledd nummer to på høyre side er lite i forhold til de to øvrige, med andre ord dersom

$$4k^2r^2 \gg 1$$

dvs

$$r \gg \frac{1}{2k} = \frac{\lambda}{4\pi}$$

dvs for avstander fra bølgens sentrum som er store i forhold til bølgelengden.

Eksakte løsninger av den sylindersymmetriske bølgeligningen involverer en spesiell type matematiske funksjoner kalt Besselfunksjoner. Vi går ikke nærmere inn på det her.

Oppgave 4

$pV =$ konstant gir $d(pV) = 0$, og dermed $dp \cdot V + p \cdot dV = 0$, dvs

$$B = -V\,\frac{dp}{dV} = p.$$

Lydhastigheten, med antagelse om isoterme forhold (dvs konstant temperatur), blir

$$v = \sqrt{B/\rho} = \sqrt{p/\rho},$$

mens den korrekte antagelsen om adiabatiske forhold (dvs ingen utveksling av varme i løpet av lydbølgens periode) gir

$$v = \sqrt{\gamma p/\rho}.$$

Den prosentvise feilen blir

$$(\sqrt{\gamma} - 1) \cdot 100\% \simeq 18\%.$$

(Alternativt 15%, dersom vi regner relativt den adiabatiske verdien.)