

Utdypende løsning på oppgave 4 i øving 6

Oppgave 4

Først den ”offisielle” løsningen:

At vandretiden τ kun avhenger av strengens omløpsperiode T , og ikke av lengden L eller massen M , kan vi slå fast med ren dimensjonsanalyse: Problemet inneholder kun størrelsene T , M og L . Det går ikke an å lage størrelser med enhet s (sekund) ved å kombinere kg og m. Da gjenstår bare T .

Bølgehastigheten er $v = \sqrt{S/\mu} = \sqrt{SL/M}$. Snordraget $S(r)$ i avstand r fra festepunktet er den kraften som skal til for å holde strengbiten mellom r og L i sirkulær bane med vinkelfrekvens $\omega = 2\pi/T$, dvs akselerasjon $a(r') = \omega^2 r'$:

$$\begin{aligned} S(r) &= \int a \, dm = \int_r^L \omega^2 r' \frac{M}{L} dr' \\ &= \frac{\omega^2 M}{2L} (L^2 - r^2) \end{aligned}$$

Med $S(r)$ på plass skulle resten være grei skuring! Bølgehastigheten blir

$$v(r) = \sqrt{S(r)L/M} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{L^2 - r^2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{T} \sqrt{L^2 - r^2}$$

Tiden som en bølgepuls bruker fra festepunktet til strengens ende blir dermed

$$\begin{aligned} \tau &= \int \frac{dr'}{v} \\ &= \frac{T}{\sqrt{2}\pi} \int_0^L \frac{dr'}{\sqrt{L^2 - r'^2}} \\ &= \frac{T}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Her er en alternativ måte å tenke på:

Vi betrakter en liten bit av strengen, mellom r og $r+dr$, og med masse $dm = dr \cdot M/L$. På denne lille biten virker det en kraft *innover mot sentrum* på grenseflaten ved r (fra masseelementet rett innenfor) og en kraft *utover* på grenseflaten ved $r+dr$ (fra masseelementet rett utenfor). Disse to kreftene må nettopp være snordraget $S(r)$ og $S(r+dr)$, slik at nettokraften, innover, på vårt lille masseelement må være:

$$dF = S(r) - S(r+dr).$$

Ifølge Newtons 2. lov har vi

$$dF = dm \cdot a = \frac{M}{L} dr \omega^2 r.$$

Den totale kraften på strengbiten som befinner seg mellom r og L blir da

$$F(r) = \int dF = \frac{M\omega^2}{L} \int_r^L r \, dr = \frac{M\omega^2}{2L} (L^2 - r^2).$$

Men denne kraften $F(r)$ må nettopp tilsvare snordraget i avstand r , dvs $F(r) = S(r)$. Dvs, snordraget i r er lik nettokraften på strengen mellom r og L . (Del f.eks. opp biten mellom r og L i små biter med lengde dr . I hver grenseflate mellom slike små biter virker biten til venstre på den til høyre med en like stor men motsatt rettet kraft som omvendt, Newtons 3. lov, slik at kraften i den venstre enden, $S(r)$, er lik total kraft på hele strengen utenfor r .)

Med $S(r)$ på plass henvises til avslutningen på den offisielle versjonen.