FY1002/TFY4160 Bølgefysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2010.

Løsningsforslag til øving 7

Oppgave 1

Fasehastigheten:

$$v = \omega/k = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}}$$

Gruppehastigheten:

$$v_g = d\omega/dk = \frac{g + 3\gamma k^2/\rho}{2\sqrt{gk + \gamma k^3/\rho}} = \frac{g\lambda^2 + 12\pi^2\gamma/\rho}{\sqrt{8\pi g\lambda^3 + 32\pi^3\gamma\lambda/\rho}}$$

Korte bølgelengder:

$$v \simeq \sqrt{2\pi\gamma/\rho\lambda}$$

$$v_g \simeq \sqrt{\frac{144\pi^4\gamma^2/\rho^2}{32\pi^3\gamma\lambda/\rho}} = \sqrt{9\pi\gamma/2\rho\lambda} = \frac{3}{2}v$$

Lange bølgelengder:

$$v \simeq \sqrt{g\lambda/2\pi}$$

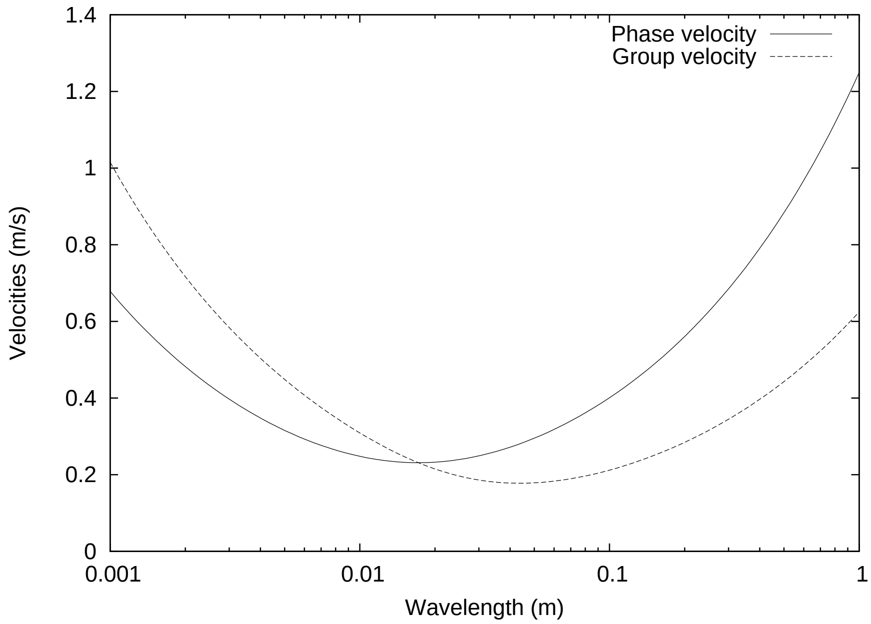
$$v_g \simeq \sqrt{g^2\lambda/8\pi g} = \sqrt{g\lambda/8\pi} = \frac{1}{2}v$$

Innsetting av tallverdier gir:

$$v = \sqrt{1.560\lambda + 4.587\cdot 10^{-4}/\lambda}$$

$$v_g = \frac{9.8\lambda^2 + 8.646\cdot 10^{-3}}{\sqrt{246.3\lambda^3 + 0.07243\lambda}}$$

Disse uttrykkene gir v og v_g i enheten m/s med λ i enheten m.



Oppgave 2

a) Vi innfører $x = kd$. Fasehastigheten er:

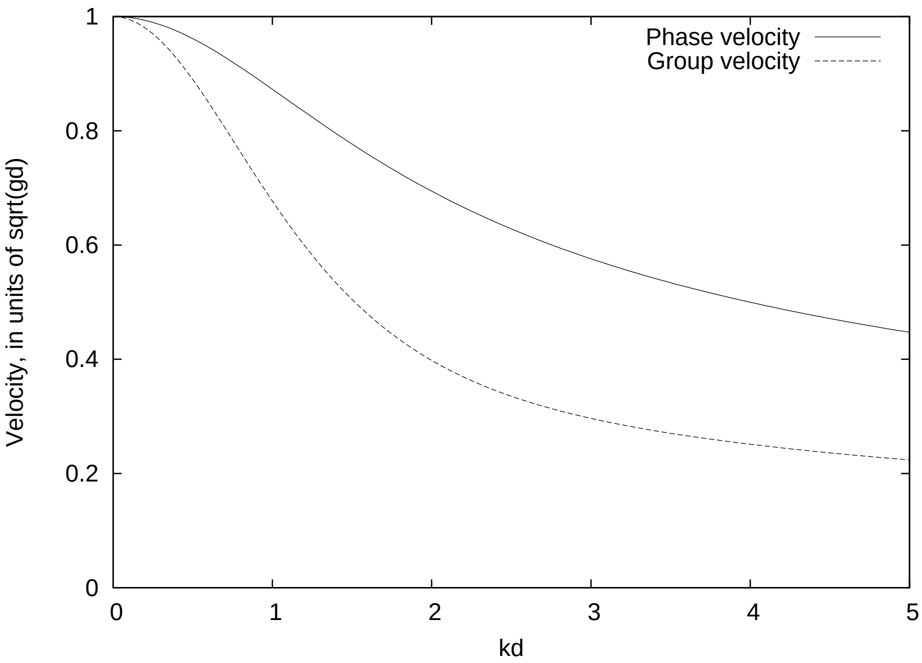
$$v = \omega/k = \sqrt{\frac{g}{k}\tanh kd} = \sqrt{gd}\sqrt{\frac{\tanh x}{x}}$$

Gruppehastigheten:

$$v_g = d\omega/dk = \frac{1}{2\omega}\frac{d\omega^2}{dk} = \frac{g\tanh kd + gkd/\cosh^2 kd}{2\sqrt{gk\tanh kd}}$$

Her er det flere måter å skrive v_g på, for eksempel

$$v_g = \frac{\sqrt{gd}}{2}\left(\sqrt{\frac{\sinh x}{x\cosh x}} + \sqrt{\frac{x}{\sinh x\cosh^3 x}}\right)$$



Fra figuren ser vi at forskjellen mellom v og v_g er mindre enn 5 % så lenge kd er mindre enn 1/3, sånn omtrent. Med andre ord,

$$d < \lambda/6\pi \sim \lambda/20$$

synes som en fornuftig grense for å snakke om grunt vann.

b) På dypt vann blir dispersjonsrelasjonen for tyngdebølger

$$\omega = \sqrt{gk}$$

ettersom $\tanh kd \simeq 1$ når $kd \gg 1$. Når tyngdekrefter dominerer, blir dispersjonsrelasjonen for overflatebølger på dypt vann

$$\omega = \sqrt{gk}$$

dvs den samme.