

Øving 10

Oppgave 1

a) Vis at differansen $C_p - C_V$ for ett mol av en van der Waals gass med tilstandsligning

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

er gitt ved

$$C_p - C_V = \frac{R}{1 - \frac{2a(V-b)^2}{RTV^3}}.$$

Hva blir $C_p - C_V$ på kritisk punkt?

Tips: Benytt resultatet for $C_p - C_V$ utledet i forelesningene (kap 4.5), inklusive relasjonen mellom deriverte ved syklisk ombytte av variable.

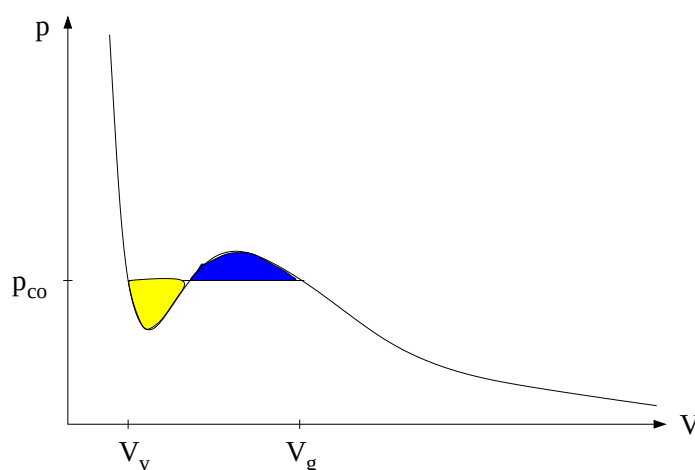
b) For temperaturer T under kritisk temperatur T_c gir van der Waals tilstandsligning,

$$p(V) = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2},$$

koeksistens mellom væske og gass for en bestemt verdi av trykket, p_{co} , det såkalte koeksistenstrykket. Vi går ikke inn på begrunnelsen her, men det kan vises at p_{co} fastlegges ved hjelp av Maxwells regel om like arealer, dvs like stort gult (lyst) som blått (mørkt) areal i figuren under, alternativt den ekvivalente betingelsen

$$p_{co} \cdot (V_g - V_v) = \int_{V_v}^{V_g} p(V) dV,$$

der V_v og V_g er hhv molart væske- og gassvolum.



Bruk verdiene $a = 1.368 \text{ bar (m}^3/\text{kmol)}^2$ og $b = 0.0367 \text{ (m}^3/\text{kmol)}$ for luft (jf øving 1), samt gasskonstanten $R = 8.314 \text{ J/mol K}$. Kritisk temperatur for luft er med disse parametrene og van der Waals tilstandsligning omtrent 133 K. (Sjekk dette, $T_c = 8a/27kb$.)

Oppgave: Bruk Maxwells regel om like arealer til å fastlegge koeksistenstrykket p_{co} , med en nøyaktighet på 1 mbar, ved en gitt temperatur $T = 123$ K. Du kan ta utgangspunkt i Matlab-programmet i øving 1, der van der Waals isothermen for (blant annet) denne temperaturen ble plottet i andre del av oppgave 4.

En enkel algoritme for å løse dette problemet numerisk kan se omtrent slik ut:

- Basert på isothermen $p(V)$, gjett en verdi for væskevolumet V_v .
- Bestem tilhørende trykkverdi $p(V_v)$.
- Bestem tilsvarende gassvolum V_g , dvs slik at $p(V_g) = p(V_v)$
- Bestem

$$\int_{V_v}^{V_g} p(V) dV$$

numerisk og sammenlign med arealet $p(V_v) \cdot (V_g - V_v)$.

- Gjett en ny verdi for V_v og gjenta prosedyren inntil p_{co} er bestemt med den ønskede nøyaktighet.

En innledende del til programmet er tatt med nedenfor, inkludert noen tips for den videre programmeringen:

```
%%FY1005/TFY4165, Oving 10, innledende del (hentet fra oving 1).
%%
%%Velg utskrift av tallverdier med flere gjeldende siffer enn det som er standard
format long;
%%Temperatur i Kelvin
T=123;
%%V = molart volum (L/mol)
Vmin=0.05;
Vmax=0.50;
NV=500;
%%V = vektor med verdier mellom Vmin og Vmax, i alt NV verdier
V=linspace(Vmin,Vmax,NV);
%%Verdier for a og b for luft: 1.368  0.0367
%%Enheter: [a] = bar*(L/mol)^2 og [b] = L/mol
R=8.134;
a=1.368;
b=0.0367;
%%van der Waals tilstandsligning
p = (R*T./(V-b))/100 - a./(V.*V);
%%Plott av isothermen
fig = plot(V,p);
axis([0 Vmax 0 70]);
%%Tekst paa figuren
title('Isoterm: van der Waals gass','fontsize',18);
xlabel('Molart volum (L/mol)','fontsize',18);
ylabel('Trykk (bar)','fontsize',18);
%%Tegn alle kurver i en og samme figur, saa vi kan sammenligne.
hold on;

%%HERFRA maa du selv skrive matlab-koden, men du faar noen tips:
%%Elementer som maa eller boer inngaa, inklusive eksempler:
```

```

%%
%%A Innlesing av gjetning paa vaeskevolumet V1:
%%
%%Eksempel som ber om innlesing av tallverdi for stoerrelsen x1:
%%x1 = input('Les inn tallverdi for x1: ')
%%
%%B Bestem trykkverdi P1 som tilsvareer volumet V1:
%%
%%Eksempel som bestemmer y1 = x1 - x1^3:
%%y1 = x1 - x1^3;
%%
%%C Bestem tilsvarende gassvolum V2. Tips: Velg en startverdi V_stor som
%%ut fra kurven p(V) helt sikkert er stoerre enn V2, reduser V_stor
%%med en passende skrittlengde dV, og bruk en while (...) ... end loekke
%%til aa lokalisere V2 slik at P2 = p(V2) er (omtrent) lik P1.
%%
%%Eksempel som lokaliserer x2 slik at y2 = x2 - x2^3 er (omtrent) lik
%%y1 = x1 - x1^3 med verdien av x1 et sted mellom -1.15 og -0.58 (valgt
%%slik at vi faktisk har en loesning y2 = y1):
%%x_stor = 1.5;
%%dx = 0.1; %%skrittlengde
%%y_find = x_stor - x_stor^3;
%%while (y_find < y1)
%%    x_stor = x_stor - dx;
%%    y_find = x_stor - x_stor^3;
%%end;
%%x2 = x_stor;
%%y2 = y_find;
%%
%%D Integrer p(V) numerisk fra V1 til V2, og sammenlign med P1*(V2-V1),
%%dvs. arealet under den horisontale linjen.
%%
%%Eksempel som integrerer funksjonen
%%y = x - x^3 fra x1 til x2 med saakalt adaptiv Simpson-kvadratur, og
%%regner ut forskjellen mellom integralet I og arealet y1*(x2-x1) under
%%den horisontale linjen:
%%y = @(x) (x - x^3);
%%I = quad(y, x1, x2);
%%avvik = I - y1*(x2-x1);
%%
%%E Tegn inn linjen mellom (P1,V1) og (P2,V2). Skriv ut beregnede stoerrelser.
%%
%%Eksempel:
%%plot([x1,x2],[y1,y2]);
%%disp('x1,x2: ')
%%disp(x1)
%%disp(x2)
%%disp('y1,y2: ')
%%disp(y1)
%%disp(y2)

```

```

%%disp('Avvik mellom areal under kurve og rektangel: ')
%%disp(avvik)
%%
%%Endre x1, og eventuelt ogsaa x_stor og dx, og kjoer paa nytt,
%%for aa oppnaa et mindre avvik.

```

Et par kommentarer, samt tips til videre arbeid:

- Merk at skrittlengden dV setter en begrensning på hvor nøyaktig koeksistenstrykket p_{co} kan bestemmes.
- Merk at fortegnet på avviket mellom arealet under kurven $p(V)$ og rektanglet kan brukes til å avgjøre om gjetningen på V_v skal justeres opp eller ned.
- Den iterative prosessen for lokalisering av V_v , og dermed p_{co} , kan gjøres manuelt eller automatisk. I algoritmen og eksemplet ovenfor er det skissert en manuell løsning, der programmet simpelthen kjøres på nytt og ny verdi for $V1$ leses inn fra "kommandolinjen".
- *Utfordring:* Bestem dp/dT numerisk og sammenlign med Clausius-Clapeyrons ligning.

Oppgave 2

a) To enatomige gasser, neon og argon, blandes i forholdet 2:1 og er i termisk likevekt ved temperaturen T . Forholdet mellom gassenes molare masser er (ca) 1:2. Hvis midlere kinetiske energi pr neonatom er U , er midlere kinetiske energi pr argonatom

- A) U B) $U/2$ C) $2U$ D) $U/4$

b) En Carnot-varmepumpe brukes til å overføre varme fra utvendig luft ved fem kuldegrader til innvendig luft ved 20 varmegrader. Hvor mye effekt må varmepumpa levere for at overført varme skal tilsvare 2.0 kW?

- A) 23 kW B) 2.0 kW C) 1.8 kW D) 0.17 kW

c) Hvis trykket er lavere enn ved trippelpunktet, kan et stoff eksistere som

- A) gass og væske, men ikke fast stoff B) gass og fast stoff, men ikke væske
C) væske og fast stoff, men ikke gass D) gass, væske og fast stoff

d) En ideell gass kan ekspandere isotermt eller adiabatisk og utføre arbeid, hhv W_i eller W_a . Da er

- A) $W_i = W_a$ B) $W_i < W_a$ C) $W_i > W_a$ D) svaret avhengig av temperaturen.

e) En ideell gass tilføres 30 J varme ved konstant trykk. Da vil gassens indre energi

- A) forbli uendret B) øke med 30 J
C) øke med mer enn 30 J D) øke med mindre enn 30 J

f) To ulike system med ideell gass har lik temperatur. Molekylene i system 1 har større masse enn molekylene i system 2. Hvilken påstand om molekylenees rms-hastighet ($v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$) og midlere kinetiske energi E_k er korrekt?

- A) v_{rms} og E_k er like i de to systemene
B) v_{rms} og E_k er begge størst i system 2
C) v_{rms} er størst i system 2, E_k er lik i de to systemene
D) v_{rms} er størst i system 2, E_k er størst i system 1