FY1005/TFY4165 Termisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Våren 2013.
Veiledning: 26. og 29. april. Innleveringsfrist: Torsdag 2. mai kl 14.

Øving 13

Varmeledning med kulesymmetri

a) Vis ved innsetting at

$$T = T(r,t) = a\frac{\sin(kr)}{r}\, e^{-Dk^2t}$$

er en løsning av varmeledningsligningen

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_T\nabla^2 T \quad \text{der} \quad \nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r \quad \text{med kulesymmetri.}$$

b) En mer generell kulesymmetrisk løsning er gitt ved

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin(k_n r)}{r} e^{-Dk_n^2 t} + T_\infty.$$

Størrelsene a_n og k_n bestemmes av grensebetingelsene. Hvilke verdier kan k_n ha når en grensebetingelse er at $T(R,t) = T_\infty$?

c) Varmeledningsligningen skal ved siden av grensebetingelsen $T(R,t) = T_\infty$ løses med initialbetingelsen

$$T(r,0) - T_\infty = T_0 \ (= \text{konst}), \quad (\text{for } r < R).$$

Koeffisientene a_n kan så bestemmes ved å regne ut integralet

$$a_m = \frac{2}{R}\int_0^R (T(r,0) - T_\infty) r \sin(k_m r)\, dr.$$

Vis ved å sette inn uttrykket under punkt *b*) at dette gir riktig verdi for a_m. [Dette tilsvarer rekkeutvikling av en vilkårlig funksjon i egentilstander i kvantemekanikk. Her blir dette en fourier-rekke (sinusrekke) av funksjonen $(T - T_\infty)r$ i intervallet $-R < r < R$.] Regn så ut koeffisientene a_n.

(Svar: $(-1)^{n-1}2RT_0/(n\pi)$)

Oppgitt:
$2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$ og $\int x\sin(\alpha x)\, dx = -x\cos(\alpha x)/\alpha + \sin(\alpha x)/\alpha^2$.

d) For store tider (slik at $\exp(-Dk_1^2 t) \ll 1$) vil leddet med k_1 dominere slik at de øvrige leddene kan neglisjeres. Betrakt så avkjøling av ei kule der grensebetingelsene er som under punkt *c*). Anta at kula består vesentlig av vann (som er bundet slik at det ikke kan strømme). Ved hvilken tid $t = \tau$ er temperaturen i midten av kula ($r = 0$) sunket til $T = 0.1\,T_0 + T_\infty$ (slik at k_1-leddet dominerer) når $R = 5.0$ cm og $D_T = 0.00050$ m^2/h for vann?

(Svar: 1 time 31 min)
Oppgitt: $\sin x/x \to 1$ når $x \to 0$.

e) Bestem $T(r,t)$ numerisk for $0 < r < R$ og $0 < t < t_{\max}$, med (f.eks.) $t_{\max} = 3$ timer. Prøv deg fram når det gjelder hvor mange ledd du skal ta med i fourier-rekken. Lag en animasjon som viser tidsutviklingen av temperaturprofilen $T(r)$. Lag også figurer med hhv $T(t)$ for utvalgte verdier av posisjonen r og $T(r)$ for utvalgte tidspunkter t. Bruk 4 - 5 kurver pr figur.

Nedenfor finner du et eksempel på hvordan man kan lage en animasjon i Matlab ved å slette den gamle grafen og tegne en ny graf i samme figur (ov13eksempel.m, tilgjengelig på hjemmesiden).

```
%Tabell med tidspunkter
t=0:1:20;
%Tabell med posisjoner
r=0.00:0.01:1.00;
%Starttabell for f(r) med like mange elementer som tabellen for posisjonen r:
f = linspace(0,10,length(r));
%Neste linje setter EraseMode til xor, bra for "smooth animation", se
%http://nd.edu/~dtl/cheg258/notes/doc/tec2.5.html
p=plot(r,f,'-','EraseMode','xor');
%Sett aksegrenser [xmin xmax ymin ymax]:
axis([0 1 0 2]);
%Nodvendig med "hold on" for fortsatt bruk av samme figur:
hold on;
xlabel('Posisjonen r');
ylabel('Funksjonen f');
title('Animasjon av f(r,t)');
for i = 1 : length(t),
 for k = 1 : length(r),
  f(k) = sin(r(k)*t(i))^2;
 end
 %Plott f(r,t) for aktuelt tidspunkt:
 set(p,'XData',r,'YData',f)
 %Oppdaterer grafen i figuren:
 drawnow
 %Forsinker framvisningen i 0.2 s (juster etter behov):
 pause(0.2);
end
hold off;
```

Som du ser, ingen flervalgsoppgaver denne gang heller. Men fortvil ikke, jeg vil legge ut en del slike oppgaver på hjemmesiden, utenom det ordinære øvingsopplegget.