FY1005/TFY4165 Termisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Våren 2013.

Løsningsforslag til øving 13

a) Med kulesymmetri blir

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r,$$

så vi får

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= a\frac{\sin kr}{r}(-D_T k^2)e^{-D_T k^2 t} = -D_T k^2 T, \\
\nabla^2 T &= a(-k^2)\frac{\sin kr}{r}e^{-D_T k^2 t} = -k^2 T.
\end{aligned}$$

Følgelig er den gitte T løsning av varmeledningsligningen.

b) Grensebetingelsen $T = 0$ for $r = R$ innebærer at

$$\sin k_n R = 0,$$

eller

$$k_n R = n\pi \quad \text{dvs} \quad k_n = n\pi/R,$$

med n et heltall.

c) Ved å sette inn det gitte uttrykket for T i integralet for a_m finner en $(t = 0)$

$$\begin{aligned}
a_m &= \frac{2}{R}\sum_n a_n \int_0^R \frac{\sin k_n r}{r} r \sin k_m r \, dr \\
&= \frac{2}{R}\sum_n a_n \frac{1}{2}\int_0^R \{[\cos[(n-m)\pi r/R] - \cos[(n+m)\pi r/R]\} dr \\
&= \frac{2}{R}\sum_n a_n \frac{1}{2} R\delta_{nm} \\
&= a_m,
\end{aligned}$$

som skulle vises. Her har vi brukt at

$$\int_0^R \cos(q\pi r/R)\, dr = 0$$

dersom q er et heltall forskjellig fra null, mens det samme integralet har verdien R dersom $q = 0$. Med den gitte grensebetingelsen blir koeffisientene

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{R}T_0 \int_0^R r \sin k_n r \, dr \\
&= \frac{2T_0}{R}\bigg|_0^R \left(-\frac{r\cos k_n r}{k_n} + \frac{\sin k_n r}{k_n^2}\right) \\
&= \frac{2T_0}{R}\left(\frac{-R\cos n\pi}{k_n} + 0\right) = \frac{2T_0}{k_n}(-1)^{n-1} \\
&= \frac{2RT_0}{n\pi}(-1)^{n-1}.
\end{aligned}$$

d) Siden

$$\lim_{r\to 0} \frac{\sin k_n r}{k_n r} = 1,$$

har en at

$$T(0,t) - T_\infty = \sum_n a_n k_n e^{-D_T k_n^2 t} \underset{t\to\infty}{\rightarrow} a_1 k_1 e^{-D_T k_1^2 t} = 2T_0 e^{-D_T k_1^2 t}.$$

Ved tida $t = \tau$ har en så

$$T(0,\tau) - T_\infty = 2T_0 e^{-D_T k_1^2 \tau} = \frac{1}{10} T_0.$$

Løst mhp τ gir dette

$$\tau = \frac{-\ln(1/20)}{D_T k_1^2} \simeq 1.52 \text{ h } = 5460 \text{ s}.$$

Her har vi satt inn $k_1 = \pi/R$, $R = 0.05$ m, og $D_T = 0.0005$ m^2/h.

Litt ekstra puslearbeid for den som liker denslags:
Kontroller den oppgitte rekkeutviklingen for T ved å sette inn uttrykk for koeffisientene a_n og "bølgetallene" k_n og regne ut

$$T(r,0) - T_\infty = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(k_n r)$$

og vise at høyre side her blir lik T_0, som oppgitt i punkt *c*). Tips:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

og

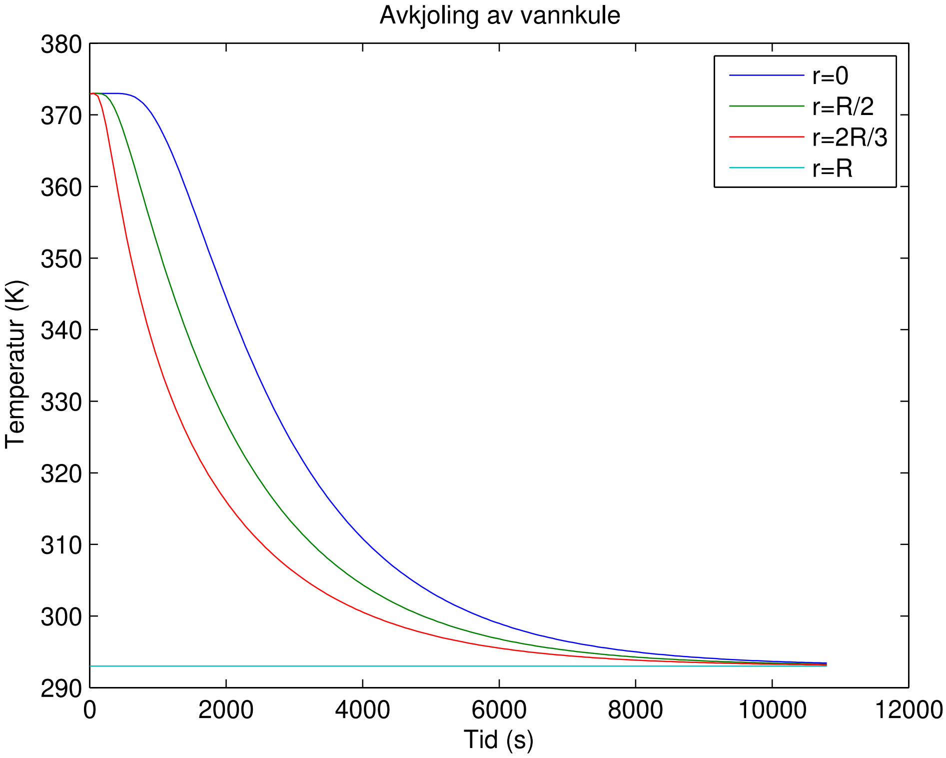
$$\sin(n\alpha) = \frac{1}{2i}[(e^{i\alpha})^n - (e^{-i\alpha})^n].$$

e) Forslag til MATLAB-program som besvarer oppgaven (se utlagt fil ov13.m):

```
%FY1005/TFY4165 Termisk fysikk, oving 13, oppgave e, 2013.
%Avkjoling av vannkule med perfekt kobling til omgivende
%varmereservoar.
clear;
format long;
%Tabell med tidspunkter (i sekunder)
t=0:60:10800;
%Tabell med posisjoner (i meter), fra 1 mm til 50 mm
r=0.001:0.001:0.050;
%Kulas radius (m):
R=0.050;
%Temperaturforskjell mellom kule og omgivelser ved t=0:
T0=80;
%Temperatur i omgivende reservoar (K):
T1=293;
%Termisk diffusivitet for vann (m^2/s):
D=(25E-7)/18;
a=D*pi*pi/(R*R);
%Antall ledd som tas med i losningen:
N=1000;
%Starttabell for T(r) med like mange elementer som
%tabellen for posisjonen r:
T = linspace(T1,T1+T0,length(r));
%Neste linje setter EraseMode til xor, bra for "smooth animation", se
%http://nd.edu/~dtl/cheg258/notes/doc/tec2.5.html
p=plot(r,T,'-','EraseMode','xor');
%Sett aksegrenser [xmin xmax ymin ymax]:
axis([0 0.05 T1-3 T1+1.25*T0]);
%Nodvendig med "hold on" for fortsatt bruk av samme figur:
hold on;
xlabel('Posisjon (m)');
ylabel('Temperatur (K)');
title('Avkjoling av vannkule, animasjon');
for i = 1 : length(t),
 for k = 1 : length(r),
  T(k) = T1;
  for j = 1 : N,
  T(k)=T(k)+2*T0*(-1)^(j+1)*exp(-j*j*a*t(i))*sin((j*pi/R)*r(k))/((j*pi/R)*r(k));
  end
  %Tsentrum = T(t) i sentrum av kula:
  if k == 1,
      Tsentrum(i) = T(k);
  end
  %Tmidti = T(t) i avstand R/2 fra sentrum:
  if k == int8(length(r)*1/2),
      Tmidti(i) = T(k);
  end
  %Tlangtut = T(t) i avstand 2R/3 fra sentrum:
```

```
    if k == int8(length(r)*2/3),
        Tlangtut(i) = T(k);
    end
    %Tytterst = T(t) paa kulas overflate:
    if k == length(r),
        Tytterst(i) = T(k);
    end
    %T60 = T(r) ved t = 60 s:
    if i == 2,
        T60 = T;
    end
    %T1200 = T(r) ved t = 1200 s:
    if i == 21,
        T1200 = T;
    end
    %T3600 = T(r) ved t = 3600 s:
    if i == 61,
        T3600 = T;
    end
    %T10800 = T(r) ved t = 10800 s:
    if i == 181,
        T10800 = T;
    end
  end
  %Plott T(r) for aktuelt tidspunkt:
  set(p,'XData',r,'YData',T)
  %Oppdaterer grafen i figuren:
  drawnow
  %Forsinker framvisningen i 0.2 s (juster etter behov):
  pause(0.2);
end
hold off;
%Ber om ny figur for aa plotte T(t) for valgte avstander fra sentrum:
figure;
plot(t,Tsentrum,t,Tmidti,t,Tlangtut,t,Tytterst);
legend('r=0','r=R/2','r=2R/3','r=R');
xlabel('Tid (s)');
ylabel('Temperatur (K)');
title('Avkjoling av vannkule');
%Ber om ny figur for aa plotte T(r) for valgte tidspunkter:
figure;
plot(r,T60,r,T1200,r,T3600,r,T10800);
legend('t=1min','t=20min','t=60min','t=180min');
axis([0 0.05 T1-3 T1+1.5*T0]);
xlabel('Posisjon (m)');
ylabel('Temperatur (K)');
title('Avkjoling av vannkule');
```

Figur som viser $T(t)$ for utvalgte verdier av posisjonen r:



Figur som viser $T(r)$ for utvalgte tidspunkter t: