FY1005/TFY4165 Termisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Våren 2013.

Løsningsforslag til øving 6

Oppgave 1

a) Siden vi er ute etter sammenhenger for adiabatiske prosesser, er det vel naturlig å ta utgangspunkt i $đQ = 0$. Fra 1. hovedsetning:

$$
\begin{aligned}
đQ &= dU + p\,dV = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + p\,dV \\
&= C_V\,dT + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV.
\end{aligned}
$$

Her har vi brukt tipset i oppgaveteksten (PCH 4.18!) til å kvitte oss med $(\partial U/\partial V)_T$. Van der Waals' tilstandsligning gir

$$
T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{RT}{V-b}.
$$

Dermed:

$$
\begin{aligned}
0 &= đQ = C_V\,dT + \frac{RT}{V-b}\,dV \\
C_V\,\frac{dT}{T} &= -R\frac{dV}{V-b} \\
C_V\,\ln T &= -R\ln(V-b) + \text{konst} \\
T(V-b)^{R/C_V} &= \text{konst}
\end{aligned}
$$

Her kan T uttrykkes ved p og V ved å bruke tilstandsligningen, som gir

$$
\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b)^{1+R/C_V} = \text{konst}.
$$

I grensen $C_V \to \infty$ blir eksponenten i disse to uttrykkene hhv 0 og 1, som gir hhv $T = $ konst og $(p + a/V^2)(V-b) = $ konst. Men dermed er jo adiabatene blitt til isotermer! Dette kan forstås ved at energien som trengs til å utføre arbeidet blir tatt fra den indre energien, og når C_V er meget stor, blir temperaturstigningen liten for en gitt energiendring. (Med $C_V = \infty$ blir endringen i T lik 0. Følgelig må da adiabatene bli til isotermer.)

b) Her vil det være enklest å bestemme arbeidet ved å regne ut tilført varmemengde Q_2 og avgitt varmemengde $Q_1 (< 0)$ langs isotermene ab og cd. Da må man ta hensyn til at indre energi endrer seg med V. Med tilstandsligningen finner man

$$
\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p = \frac{a}{V^2}.
$$

Integrasjon med hensyn på V gir

$$
U = -\frac{a}{V} + f(T).
$$

Arbeidet langs isotermene blir

$$
\begin{aligned}
W_{ab} &= \int_{V_a}^{V_b} p\,dV \\
&= \int_{V_a}^{V_b} \left(\frac{RT_2}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right) dV \\
&= RT_2\,\ln\frac{V_b - b}{V_a - b} + a\left(\frac{1}{V_b} - \frac{1}{V_a}\right)
\end{aligned}
$$

og tilsvarende

$$W_{ab} \quad = \quad RT_1 \ln \frac{V_d - b}{V_c - b} + a\left(\frac{1}{V_d} - \frac{1}{V_c}\right)$$

Tilført og avgitt varmemengde blir dermed

$$Q_2 = W_{ab} + U_b - U_a = RT_2 \ln \frac{V_b - b}{V_a - b}$$

og

$$Q_1 = W_{cd} + U_d - U_c = RT_1 \ln \frac{V_d - b}{V_c - b}.$$

Vi trenger en sammenheng mellom Q_2 og Q_1 for å fastlegge virkningsgraden. Adiabatligningen fra punkt a) gir:

$$\begin{aligned} T_2(V_b - b)^{R/C_V} &= T_1(V_c - b)^{R/C_V} \\ T_2(V_a - b)^{R/C_V} &= T_1(V_d - b)^{R/C_V} \end{aligned}$$

Vi dividerer disse to med hverandre. Da forsvinner temperaturene, og vi står igjen med

$$\left(\frac{V_b - b}{V_a - b}\right)^{R/C_V} = \left(\frac{V_c - b}{V_d - b}\right)^{R/C_V},$$

eller

$$\frac{V_b - b}{V_a - b} = \frac{V_c - b}{V_d - b}.$$

Innsetting i uttrykkene for Q_2 og Q_1 gir nå

$$Q_1 = -\frac{T_1}{T_2} Q_2.$$

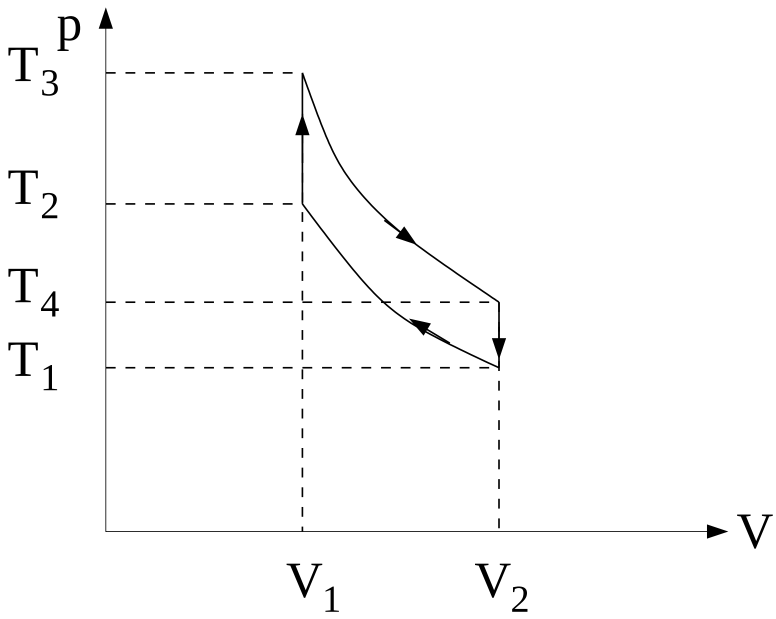
Energibevarelse gir

$$W = Q_2 + Q_1 = \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) Q_2$$

siden indre energi som kjent er uendret når maskinen er tilbake til utgangspunktet. Virkningsgraden blir dermed

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}.$$

Oppgave 2



For å bestemme virkningsgraden trenger vi uttrykk for tilført varme Q_1 ved lav-volum-isokoren V_1 og avgitt varme Q_2 ved høy-volum-isokoren $V_2 = \kappa V_1$. Siden prosessene er isokore, dvs konstant volum, blir de to varmemengdene

$$Q_1 = C_V(T_3 - T_2)$$

og

$$Q_2 = C_V(T_1 - T_4).$$

Her er T_3 og T_2 hhv høy og lav temperatur for isokoren med volum V_1, mens T_4 og T_1 er høy og lav temperatur for isokoren med volum V_2. Adiabatligningen $TV^{\gamma-1} = \text{konst}$ knytter temperaturene sammen:

$$T_1(\kappa V_1)^{\gamma-1} = T_2 V_1^{\gamma-1}$$

og

$$T_4(\kappa V_1)^{\gamma-1} = T_3 V_1^{\gamma-1}.$$

Virkningsgraden er

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{T_3 - T_2 + T_1 - T_4}{T_3 - T_2}.$$

Her kan (f.eks) T_2 og T_3 elimineres via adiabatligningene ovenfor, og vi finner

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{(T_4 - T_1)(\kappa^{\gamma-1} - 1)}{(T_4 - T_1)\kappa^{\gamma-1}} \\ &= 1 - \kappa^{1-\gamma}. \end{aligned}$$

Oppgave 3

Siden det ikke blir tilført varme eller utført arbeid, vil den indre energien bli uendret. Vi trenger da den indre energi som funksjon av T og V. Som i oppgave 1 kan vi benytte

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p = \frac{a}{V^2},$$

som integrert gir $U = f(T) - a/V$. Integrasjonskonstanten $f(T)$ bestemmes ved at varmekapasiteten antas konstant, $C_V = 12.6$ J/K, slik at $f(T) = C_V\,T$ og dermed

$$U = C_V\,T - a/V.$$

Uendret energi, $U_1 = U_2$, gir dermed

$$C_V T_1 - a/V_1 = C_V T_2 - a/V_2.$$

Temperaturendringen blir da

$$T_2 - T_1 = \frac{a}{C_V}\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) = -5.4\,\mathrm{K}.$$