FY1005/TFY4165 Termisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Våren 2013.

Løsningsforslag til øving 7

Oppgave 1

a) Avgitt varme fra omgivelsene (varmeplata) til systemet (kasserollen med vann) er

$$Q = \int đQ = \int C_p \, dT = C_p(T_2 - T_1).$$

Her er $C_p = c_p \cdot m = 4.184\,\mathrm{kJ/K}$ systemets varmekapasitet, i det vi ser bort fra kasserollens bidrag til C_p, som angitt i oppgaveteksten. Videre er $T_2 = 373$ K temperaturen til varmeplata, mens $T_1 = 293$ K er starttemperaturen til vannet.
i) Omgivelsene avgir varme ved konstant temperatur $T_2 = 373$ K. Entropiendringen til omgivelsene blir dermed

$$\Delta S_o = -Q/T_2 = -C_p(T_2 - T_1)/T_2 = -4.184 \cdot 80/373 = -0.90\,\mathrm{kJ/K}.$$

ii) Vannet mottar varme, ikke ved konstant temperatur, men ved stadig økende temperatur. Dets entropiendring må derfor bestemmes ved integrasjon:

$$\Delta S_v = \int dS = \int \frac{đQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_p \, dT}{T} = C_p \ln(T_2/T_1),$$

som med $T_2 = 373$ K og $T_1 = 293$ K gir $\Delta S_v = 4.184 \ln(373/293) = 1.01$ kJ/K.
iii) Total entropiendring for omgivelser pluss system blir da

$$\Delta S = \Delta S_o + \Delta S_v = -0.90 + 1.01 = 0.11\,\mathrm{kJ/K}.$$

b) Den første varmeplata avgir varmemengden $Q_3 = C_p(T_3 - T_1)$ ved den konstante temperaturen $T_3 = 323$ K, og varmer med det opp vannet fra starttemperaturen $T_1 = 293$ K til "mellomtemperaturen" T_3. Dernest avgir den varmeste varmeplata varmemengden $Q_2 = C_p(T_2 - T_3)$ ved den konstante temperaturen $T_2 = 373$ K, og varmer med det opp vannet fra T_3 til T_2.
i) Tilsvarende punkt *a*) finner vi entropiendringen til omgivelsene (dvs de to varmeplatene samlet):

$$\Delta S_o = -Q_3/T_3 - Q_2/T_2 = -C_p\left(\frac{T_3 - T_1}{T_3} + \frac{T_2 - T_3}{T_2}\right) = -4.184 \cdot \left(\frac{30}{323} + \frac{50}{373}\right) = -0.95\,\mathrm{kJ/K}.$$

ii) Vannets entropiendring bestemmes ved å integrere $đQ/T$, først fra T_1 til T_3, og deretter fra T_3 til T_2, med andre ord totalt sett fra T_1 til T_2. Det må gi samme entropiendring som funnet under punkt *a*): $\Delta S_v = 1.01$ kJ/K.
iii) Total entropiendring:

$$\Delta S = \Delta S_o + \Delta S_v = -0.95 + 1.01 = 60\,\mathrm{J/K}.$$

c) Med uendelig mange varmeplater som er trinnvis varmere kan det hele tiden være (tilnærmet) termisk likevekt mellom varmeplata og vannet, under forutsetning av at oppvarmingen går tilstrekkelig langsomt ("uendelig langsomt"). Dette blir da en reversibel prosess, siden den kan reverseres ved at vannet kan avkjøles ved å føre varmen tilbake til varmeplatene, siden det hele tiden er temperaturlikevekt mellom vannet og platene. Med slik likevekt underveis vil entropiendringen i vannet presis oppveies av entropiendringen i omgivelsene, slik at
i)

$$\Delta S_o = -C_p \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = -C_p \ln(T_2/T_1) = -1.01\,\mathrm{kJ/K}.$$

ii)

$$\Delta S_v = 1.01\,\mathrm{kJ/K}.$$

iii) $\Delta S = 0$

Oppgave 2

For en reversibel kretsprosess vil entropien være uendret. (Hvis prosessen er irreversibel, vil entropien øke.) Varmemengdene Q_2 og Q_1 tilføres systemet hhv ved temperaturene T_2 og T_1. Dernest avgis varmen Q_0 ved omgivelsenes temperatur T_0. Energibevarelse gir

$$Q_0 = Q_1 + Q_2.$$

Uendret entropi innebærer da at

$$0 = \sum_i \Delta S_i = \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_0}{T_0},$$

dvs

$$\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{T_0},$$

eller

$$Q_1 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0} \right) = Q_2 \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_2} \right).$$

Maksimal virkningsgrad er derfor

$$\nu = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1(T_2 - T_0)}{T_2(T_0 - T_1)}.$$

En alternativ framgangsmåte er som følger: Prosessen kan ses på som en Carnot-maskin som opererer mellom temperaturene T_2 og T_0 kombinert med en kjølemaskin som opererer mellom T_1 og T_0. Dermed:

$$\nu = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{W}{Q_2} \cdot \frac{Q_1}{W} = \frac{T_2 - T_0}{T_2} \cdot \frac{T_1}{T_0 - T_1} = \frac{T_1(T_2 - T_0)}{T_2(T_0 - T_1)}.$$

Oppgave 3

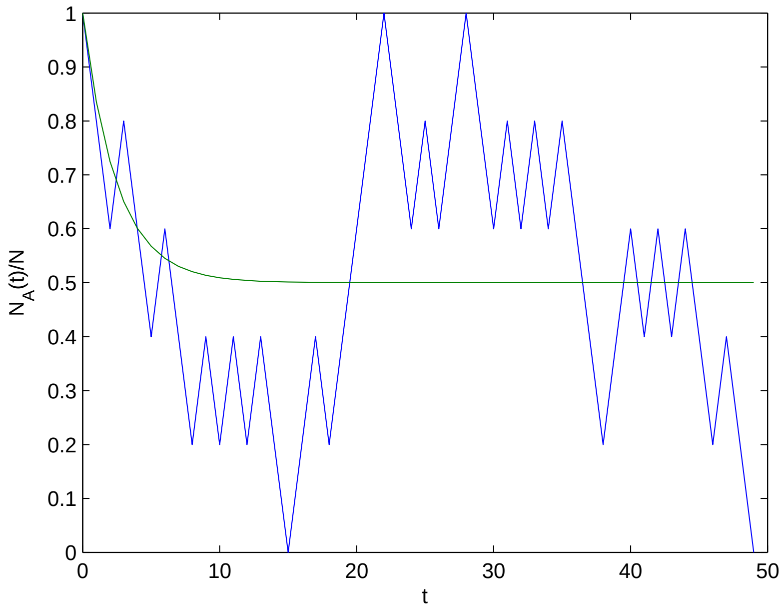
Et forslag til MATLAB-program, `lopper.m`, er lagt ut på hjemmesiden.
Verdien for c: Med en stor N vil første tidssteg (med kun ett loppehopp) tilsvare at $ct \ll 1$, slik at

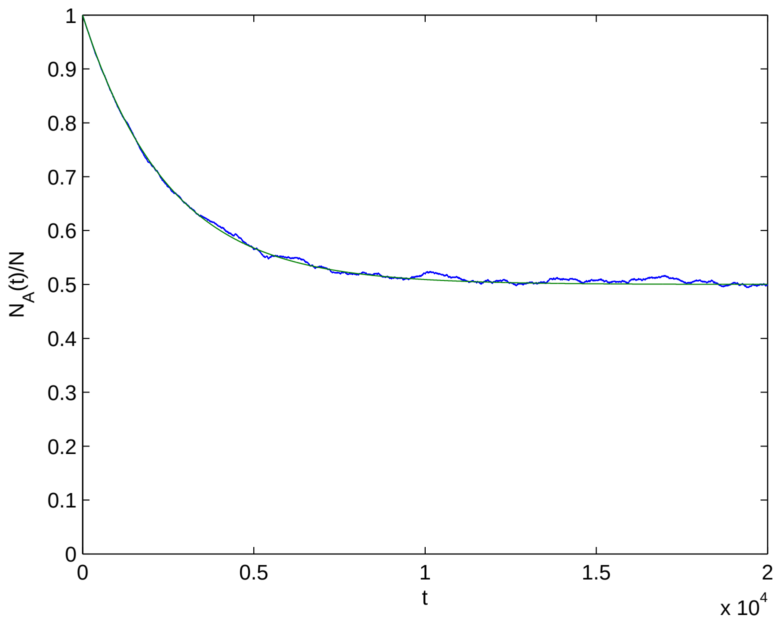
$$N_A(t) \simeq \frac{N}{2}(1 + 1 - 2ct) = N - Nct.$$

Med tallverdi 1 på tidssteget skal vi nå ha $N_A(1) = N - 1$, dvs

$$N - 1 = N - Nc,$$

som betyr at $c = 1/N$.
Figurene nedenfor viser eksempler med $N = 5$ og $N = 5000$:


N_A(t)/N
t
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
10
20
30
40
50


N_A(t)/N
t
x 10^4
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0.5
1.5
2