

Oppgave 1

a) Vi viste i forelesningene at når en gassmengde strømmer adiabatisk gjennom en porøs plugg (dyse), vil gassens entalpi $H = U + pV$ være bevart dersom vi heller ikke trekker noe arbeid ut av gassen. La oss kort rekapitulere dette: På vei inn, til venstre for "systemet", okkuperer gassmengden i utgangspunktet et volum V_1 , men komprimeres effektivt til null volum av den etterfølgende gassmengden ved trykket p_1 . På vei ut, på høyre side av systemet, utvides gassen fra null volum til et sluttvolum V_2 ved trykket p_2 . Arbeidet utført av den angitte gassmengden, på den omgivende gassen, er dermed $-p_1V_1 + p_2V_2$. Samtidig endres gassens indre energi med $\Delta U = U_2 - U_1$. Med $Q = 0$ gir 1. lov da

$$0 = U_2 - U_1 + p_2V_2 - p_1V_1,$$

med andre ord

$$U_1 + p_1V_1 = U_2 + p_2V_2,$$

eller $H_1 = H_2$.

Situasjonen her er helt tilsvarende, bortsett fra at gassen tilføres varmen Q og utfører arbeidet W (på omgivelsene) mens den oppholder seg i systemet. Dette arbeidet kommer i tillegg til det "interne arbeidet" $p_2V_2 - p_1V_1$ diskutert ovenfor. Energibalansen blir dermed slik:

$$H_1 + Q - W = H_2.$$

b) Gassens varmekapasitet ved konstant trykk er gitt ved $(\partial H / \partial T)_p$, slik at for n mol gass med varmekapasitet $C_p = \alpha R$ pr mol blir

$$\Delta H = nC_p\Delta T = \alpha nR\Delta T.$$

Med resultatet funnet i punkt a er da

$$Q - W = H_2 - H_1 = \alpha nR(T_2 - T_1).$$

c) La S_1 og S_2 angi entropien til de n mol med gass hhv før de kommer inn i systemet og etter at de har passert gjennom systemet. På vei gjennom systemet avgir omgivelsene varmen Q til gassen, og dette skjer ved omgivelsenes konstante temperatur T_1 . Omgivelsenes entropi endres dermed med

$$\Delta S_{\text{omg}} = -\frac{Q}{T_1}.$$

Total entropi kan ikke avta, $\Delta S \geq 0$, dvs $\Delta S_{\text{omg}} + S_2 - S_1 \geq 0$, eller

$$-\frac{Q}{T_1} + S_2 - S_1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad Q \leq T_1(S_2 - S_1).$$

For ideell gass fant vi i forelesningene et generelt uttrykk for entropiendringen som følge av endringer i temperatur og volum:

$$S_2 - S_1 = nC_V \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

(I denne oppgaven angir C_p og C_V molare varmekapasiteter.) For ideell gass har vi dessuten $pV = nRT$ og $C_p - C_V = R$, dvs $V_2/V_1 = T_2 p_1/T_1 p_2$ og, her, $C_V = C_p - R = (\alpha - 1)R$. Dermed:

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= (\alpha - 1)nR \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \left(\frac{T_2 p_1}{T_1 p_2} \right) \\ &= \alpha nR \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{p_1}{p_2} \\ &= nR \ln \left\{ \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^\alpha \frac{p_1}{p_2} \right\}, \end{aligned}$$

slik at

$$Q \leq nRT_1 \ln \left\{ \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^\alpha \frac{p_1}{p_2} \right\}.$$

d) Med $Q - W$, med $W = 0$, fra punkt b innsatt i uttrykket fra punkt c finner vi:

$$\begin{aligned} \alpha nR(T_2 - T_1) &\leq nRT_1 \ln \left\{ \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^\alpha \frac{p_1}{p_2} \right\}, \\ p_1 &\geq p_2 \left[\frac{T_1}{T_2} \exp \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) \right]^\alpha. \end{aligned}$$

Siden funksjonen $x \exp(x^{-1} - 1)$ er større enn 1 dersom $x \neq 1$, betyr dette at $p_1 > p_2$ dersom $T_2 \neq T_1$.

e) I systemet/maskineriet kan gassen først ekspandere (evt komprimeres) isotermt til et passende volum V_3 mens varmen Q blir absorbert. Deretter kan gassen komprimeres (evt ekspandere) adiabatisk slik at trykk p_2 og temperatur T_2 blir resultatet. Arbeidet som kommer ut av dette, er det samme som differansen i arbeid $p_2 V_2 - p_1 V_1 = nR(T_2 - T_1)$ som kreves for strømming ut og inn av systemet. Dermed blir netto utført arbeid $W = 0$.

[La V_3 være solumet etter den isoterme ekspansjonen. Isotermt arbeid blir da $W_i = \int p dV = nRT_1 \ln(V_3/V_1) = nRT_1 \ln(p_1/p_3) = nRT_1 \ln[(p_1/p_2)(T_2/T_1)^\alpha]$ når $p_1 V_1 = p_3 V_3$ ($T_3 = T_1$) og adiabatligningen, $p_3/T_1^\alpha = p_2/T_2^\alpha$ benyttes. (Fra $T_1 V_3^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$ og $V = nRT/p$, $\alpha = \gamma/(\gamma - 1)$.) Adiabatisk arbeid blir (med $Q = 0$) $W_a = -\Delta U = -nC_V(T_2 - T_1) = -(\alpha - 1)nR(T_2 - T_1)$. $W = 0$ betyr så $W_i + W_a = p_2 V_2 - p_1 V_1$.]

Oppgave 2

Blandingsentropien er gitt ved

$$\Delta S_{\text{mix}} = -k \sum_i N_i \ln x_i = -k(N_o \ln x_o + N_n \ln x_n),$$

der N_o og N_n er hhv antall molekyler med oksygen og nitrogen. De tilsvarende volum før blanding er hhv V_o og V_n . For ideell gass har vi da

$$pV_o = N_o kT, \quad pV_n = N_n kT, \quad pV = N kT,$$

der $V = V_o + V_n = 5 \text{ dm}^3$ og $N = N_o + N_n$. Dette gir så

$$x_o = N_o/N = V_o/V = 0.2, \quad x_n = N_n/N = V_n/V = 0.8,$$

slik at blandingsentropien blir (med $kN_i = pV_i/T = (pV/T)x_i$; ($i = o, n$))

$$\Delta S_{\text{mix}} = -\frac{pV}{T} (x_o \ln x_o + x_n \ln x_n) = -\frac{1.013 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{293} (0.2 \ln 0.2 + 0.8 \ln 0.8) = 0.865 \text{ J/K}.$$

Ved blanding kan det tas ut et reversibelt arbeid

$$W = T\Delta S_{\text{mix}} - \Delta U - p\Delta V = T\Delta S_{\text{mix}},$$

dvs eksergi med $\Delta U = 0$ og $\Delta V = 0$. Det minste arbeid som skal til for å skille gassene er det samme, slik at dette blir

$$W = T\Delta S_{\text{mix}} = 293 \cdot 0.865 = 253 \text{ J}.$$

Avgitt varme kommer fra tilført varme. Da $\Delta U = 0$ med $T = \text{konstant}$ for ideell gass, blir dette

$$-Q = W = 253 \text{ J}.$$

(W er det samme som arbeidet som skal til for å komprimere O_2 isotermt fra 5 liter til 1 liter, og N_2 fra 5 liter til 4 liter.)

Oppgave 3

Den lineære utvidelseskoeffisienten er gitt ved

$$\alpha_L = \frac{1}{L} \left(\frac{\Delta L}{\Delta T} \right)_p.$$

Endring av lengden blir følgelig

$$\Delta L = \alpha_L \Delta T \cdot L = 1.2 \cdot 10^{-5} \cdot (50 - (-30)) \cdot 12 = 11.5 \text{ mm}.$$

Youngs modul er gitt ved

$$Y = \frac{F}{A} \cdot \frac{L}{\Delta L}.$$

Lengdeendringen ΔL skal kompensere lengdeendringen fra temperaturendringen. Endring av spenning blir følgelig

$$\sigma = \frac{F}{A} = Y \frac{\Delta L}{L} = Y \alpha_L T$$

som med tallverdier innsatt blir $\sigma = 7.2 \cdot 10^7 \text{ Pa} = 710 \text{ atm}$.

Oppgave 4

Tidligere har vi funnet

$$C_p - C_V = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p.$$

Trykkstigningskoeffisienten $(\partial p / \partial T)_V$ kan uttrykkes ved de gitte koeffisientene ved å benytte relasjonen

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p = -1,$$

dvs

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = - \left[\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p \right]^{-1} = - \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

der vi har brukt $(\partial z / \partial y)_x = (\partial y / \partial z)_x^{-1}$. Følgelig finner vi

$$C_p - C_V = -T \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p^2 = TV \frac{\alpha_V^2}{\kappa_T}.$$

Ett mol vann har volum $V = 18/0.9971 \text{ mL} = 18.05 \text{ mL}$, så ved $25^\circ\text{C} = 298 \text{ K}$ har en altså

$$C_p - C_V = 298 \cdot 18.05 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{(2.572 \cdot 10^{-4})^2}{4.52 \cdot 10^{-10}} = 0.786 \text{ J/K} \simeq 0.095R$$

med $R = 8.314 \text{ J/K}$. Til sammenligning har vi for ideell gass at $C_p - C_V = R$.