

Øving 9

Oppgave 1

a) Vis (Maxwell-)relasjonen

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

b) En kobberblokk har volumet $V = 1 \text{ cm}^3$ ved temperaturen $T = 100 \text{ K}$ og trykket $p_1 = 1.1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Blokken blir så komprimert reversibelt og isotermt til trykket $p_2 = 1.3 \cdot 10^8 \text{ Pa}$. For Cu er isotherm kompressibilitet og kubisk utvidelseskoeffisient henholdsvis

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = 0.721 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}^{-1} \quad \text{og} \quad \alpha_V = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = 50.4 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}.$$

Beregn arbeidet W som utføres på Cu-blokken ved denne kompresjonen. (Anta at κ_T og α_V er konstante og at endringen i V er liten ved denne kompresjonen.)

c) Hva blir endringen i entropi ΔS for Cu-blokken ved denne isoterme kompresjonen, og hvor stor blir endringen i indre energi ΔU ? [Hint: Benytt resultatet fra punkt a) til å bestemme ΔS .] (Svar: $\Delta S = -6.55 \cdot 10^{-3} \text{ J/K}$.)

Oppgave 2

a) En ideell gass kjøles fra temperaturen T til T_0 . Omgivelsenens temperatur er hele tiden T_0 . Start- og slutt-tilstanden har samme volum ($\Delta V = 0$). Vis at det maksimale arbeid som er mulig å få ut av gassen er

$$W_{\max} = C_V(T - T_0) - C_V T_0 \ln \frac{T}{T_0}.$$

b) Hvor mye varme avgis, og hva er det maksimale arbeidet når gassen er ett mol toatomig gass, og avkjølingen er fra 100°C til 20°C ? (Svar: $W_{\max} = 193 \text{ J}$.)

c) En måte å ta ut det maksimale arbeidet på er å la en Carnot-maskin virke mellom den øvre avtagende temperaturen og den faste T_0 . Vis at dette gir det samme arbeidet $W_{\max}$.

d) En annen måte å ta ut det maksimale arbeidet på er først å ekspandere gassen adiabatisk slik at temperaturen synker til T_0 . Deretter komprimeres den isotermt tilbake til opprinnelig volum. Vis at dette også gir samme arbeid $W_{\max}$.

Oppgave 3

I øving 4, oppgave 5, studerte vi en ideell paramagnet med N ikke-vekselvirkende kvantiserte spinn i et ytre magnetfelt $\mathbf{B}$. Hvert spinn kunne peke ”opp” eller ”ned” relativt det ytre feltet, slik at partisjonsfunksjonen (pr spinn) ble $z = 2 \cosh(\mu_B B/kT)$, og magnetiseringen (magnetisk moment pr volumenhet) ble $M = (N\mu_B/V) \tanh(\mu_B B/kT)$. Hvis feltet er svakt, dvs $\mu_B B \ll kT$, gir dette lineær respons, $M \sim B/T$, dvs Curie’s lov.

I denne oppgaven skal vi studere entropien til en slik ideell paramagnet. Siktemålet er deretter å kunne beskrive såkalt *adiabatisk demagnetisering*.

Som i øving 4 lar vi m angi midlere magnetisk moment pr spinn (eller pr partikkel, om du vil), men skalert med faktoren μ_B slik at et gitt magnetisk moment har verdien $+1$ eller -1 , og m blir en dimensjonsløs størrelse. Videre lar vi $h = \mu_B B$ representere det ytre magnetfeltet, dvs h blir en størrelse med enhet som energi. Dermed har vi

$$m = \tanh \beta h \quad , \quad z = 2 \cosh \beta h \quad (\beta \equiv 1/kT),$$

og arbeidet utført av spinnsystemet, pr spinn, når midlere magnetisk moment, pr spinn, endres fra m til $m + dm$ blir $\delta w = -h dm$.

a) Vis at entropien σ kan bestemmes fra partisjonsfunksjonen z ,

$$\sigma = k \frac{\partial}{\partial T} (T \ln z) .$$

Oppgitt: $f = -kT \ln z$, $f = u - T\sigma$, $Td\sigma = du + p dv$ (med f, z, u, σ, v = hhv Helmholtz fri energi, partisjonsfunksjon, indre energi, entropi og volum, alle størrelser pr spinn).

Tips: Utnytt analogien $p dv \rightarrow -h dm$.

b) Med kjent partisjonsfunksjon z kan dermed entropien σ bestemmes. Regn ut σ , i første omgang som funksjon av h og β . Du observerer nå at σ kun avhenger av produktet βh , og siden midlere magnetiske moment m også er en funksjon av produktet βh , innser du at entropien må kunne skrives som en funksjon av m alene, $\sigma = \sigma(m)$. Eliminer βh fra $\sigma(\beta h)$ ved å invertere $m = \tanh(\beta h)$. Vis at dette gir $\beta h = \frac{1}{2} \ln [(1+m)/(1-m)]$. Vis deretter at entropien blir

$$\sigma(m) = k \left[\ln 2 - \frac{1}{2}(1+m) \ln(1+m) - \frac{1}{2}(1-m) \ln(1-m) \right] .$$

c) Alternativt kan entropien bestemmes direkte fra Boltzmanns prinsipp, $S = N\sigma = k \ln W$. Anta at et antall N_+ og N_- spinn peker henholdsvis med og mot magnetfeltet. Totalt magnetisk moment blir dermed $Nm = N_+ - N_-$. Samtidig har vi selvsagt $N = N_+ + N_-$. Beregn antall mikrotilstander W som er forenlig med et gitt magnetisk moment Nm (dvs med $Nm = N_+ - N_-$ fast) og vis med det at entropien blir som i punkt b.

Oppgitt: $\ln N! = N \ln N - N$ når $N \rightarrow \infty$.

d) Et spinnsystem som dette kan benyttes til å oppnå svært lave temperaturer ved å bruke adiabatisk demagnetisering. Et kraftig magnetfelt h_2 settes på isotermt ved en (forholdsvis lav) starttemperatur T_2 . Deretter fjernes den termiske koblingen til omgivelsene (varmereservoaret med temperatur T_2), og magnetfeltet slås av adiabatisk. I praksis, på grunn av en svak kobling mellom spinnene, ender en opp med et effektivt magnetfelt $h_1 > 0$ (og ikke $h_1 = 0$). Hva blir resulterende temperatur T_1 ? [Vi antar at andre bidrag til entropien kan neglisjeres. For lave temperaturer T er spesifikk varme fra kvantiserte gittervibrasjoner $C \propto T^3$, slik at bidraget til entropien herfra, $\int (C/T) dT$ kan neglisjeres.]