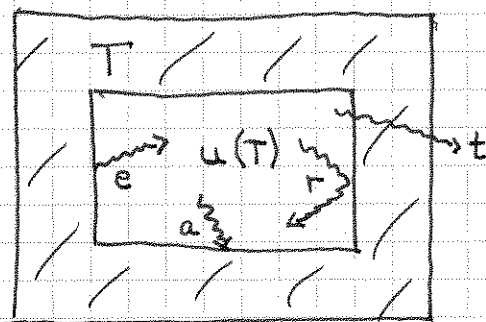


Plan:

- Innledning, kvalitativt
- Stefan-Boltzmanns lov fra termodynamikk
- Frekvensfordeling, klassisk og kvantemekanisk
- Stråling fra svart legeme

Innledning

Hulrom i termisk likevekt:



vibrerende atomer i veggene
(dvs akselererte ladninger)
emitterer stråling, som kan
absorberes og reflekteres
(og generelt også transmitteres)

⇒ hulrommet oppnår elektromagnetisk energi, med energitethet
 $u(T) = U/V$ ved temperatur T

Generelt, for e.m. bølger mot vegg:

$$r(\lambda) + a(\lambda) + t(\lambda) = 1$$

r, a, t = brøkdeler reflektert, absorbert, transmittert

Hulrom: $t = 0$ Svarte vegger: $r = 0 \Rightarrow a = 1$

Kjent fra elmag, bølgefysikk:

(107)

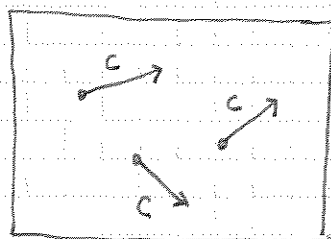
Maxwells ligninger, Bølgeligningen, $u(E, B)$ osv.

Stefan-Boltzmanns lov fra termodynamikk

Hva er $u(T)$?

Trykk i beholder med N partikler, volum V :

$$p = \frac{N}{V} \langle \vec{p}_x \cdot \vec{v}_x \rangle \quad (\text{kinetisk gass teori, kap. 9.3})$$



Fotoner: $v = c$

$$\text{Generelt: } E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$$

$$\text{Fotoner: } m = 0 \Rightarrow E = pc$$

$$\text{Isotrope forhold} \Rightarrow \langle \vec{p}_x \cdot \vec{v}_x \rangle = \langle \vec{p}_y \cdot \vec{v}_y \rangle = \langle \vec{p}_z \cdot \vec{v}_z \rangle = \frac{1}{3} \langle \vec{p} \cdot \vec{v} \rangle = \frac{1}{3} \langle \vec{p} \cdot \vec{c} \rangle$$

$$\text{Fotoner: } p = E/c, \quad v = c$$

$$\Rightarrow p = \frac{N}{V} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left\langle \frac{E}{c} \cdot c \right\rangle = \frac{1}{3} \frac{N \langle E \rangle}{V} = \frac{1}{3} \frac{U}{V} = \frac{u}{3}$$

$$\text{PCH 4.18: } \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = \frac{\partial}{\partial V} [uV] = u$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial T} = \frac{1}{3} \frac{du}{dT}; \quad u = u(T)$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{3} T \frac{du}{dT} - \frac{1}{3} u \Rightarrow 4u = T \frac{du}{dT} \Rightarrow \frac{du}{u} = 4 \frac{dT}{T}$$

$$\Rightarrow \ln u = 4 \ln T + \text{konst.} \Rightarrow \boxed{u(T) = A \cdot T^4} \quad \text{Stefan-Boltzmanns lov (1879/1884)}$$

Kan nå bestemme f.eks. entropien:

Braker Maxwell-relasjon (s. 65),

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial T} = \frac{4}{3} AT^3$$

Da S er ekstensiv, dvs $S = s \cdot V$ med s = entropi pr volumenet,

blir
$$S = \frac{4}{3} AT^3 V$$

Gibbs fri energi:

$$G = U + pV - TS = AT^4 V + \frac{1}{3} AT^4 V - \frac{4}{3} AT^4 V = \underline{0}$$

Strålingens frekvensfordeling

Skriver
$$u(T) = \int_0^\infty df \frac{du}{df} = \int_0^\infty df \eta(f, T)$$

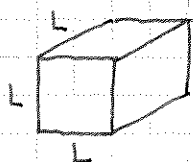
dvs $\eta = du/df = d(U/V)/df = \langle E \rangle dN / V df$

med

$\langle E \rangle$ = midlere energi pr svingemode

$\frac{dN}{df}$ = antall svingemoder pr frekvensenhet (density of modes, ert. density of states, meget viktig størrelse i fysikk, se f.eks. PCHAM kap 5.2.2)

La oss bestemme dN/df ved å betrakte kubisk hulrom med volum $V = L^3$ inni metallboks.



Maxwells ligninger gir bølgeligning for $\vec{E}$ -feltet, $\nabla^2 E_j = c^{-2} \partial^2 E_j / \partial t^2$ ($j = x, y, z$), med stående bølger som løsninger, med krav om at $\vec{E}_\parallel$ er kontinuerlig ved en grenseflate. (se Elmag + Bølgefysikk)

Siden $\vec{E} = 0$ inne i metallveggene, må vi dermed

ha $\vec{E}_{||} = 0$ i alle grenseflater mellom hulrom og metallvegg, dvs $E_y = E_z = 0$ når $x=0$ og $x=L$, $E_z = E_x = 0$ når $y=0$ og $y=L$, og $E_x = E_y = 0$ når $z=0$ og $z=L$.

Dette gir

$$E_x = E_{x0} \sin \omega t \cos \frac{n_x \pi x}{L} \sin \frac{n_y \pi y}{L} \sin \frac{n_z \pi z}{L}$$

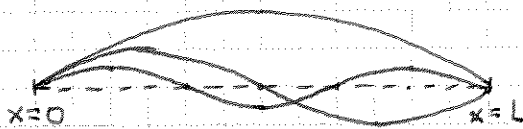
og tilsvarende for E_y og E_z . Her $n_x = 0, 1, 2, \dots$ og tilsv. for n_y og n_z (dog ikke alle lik null samtidig, for da blir $\vec{E} = 0$ overalt).

Innsetting i bølgeligningen gir $\frac{\pi^2}{L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = \frac{\omega^2}{c^2}$, så

de mulige frekvensene er

$$f = \omega / 2\pi = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} c / 2L$$

Vi kan alternativt finne mulige frekvenser ved å se på stående bølger i f.eks. x-retning:



Her er $\vec{k} = k_x \hat{x}$, og siden

$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ (transversale bølger) er

$$\vec{E} = E_y \hat{y} + E_z \hat{z} = \vec{E}_{||}$$

Vi ser at $k_x = \frac{\pi n_x}{L}$ med $n_x = 1, 2, 3, \dots$

(fordi $k = 2\pi/\lambda$, og fra figuren er $L/\lambda = \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \dots$)

Tilsvarende betraktning i y- og z-retning gir $k_y = \pi n_y / L$

og $k_z = \pi n_z / L$, slik at

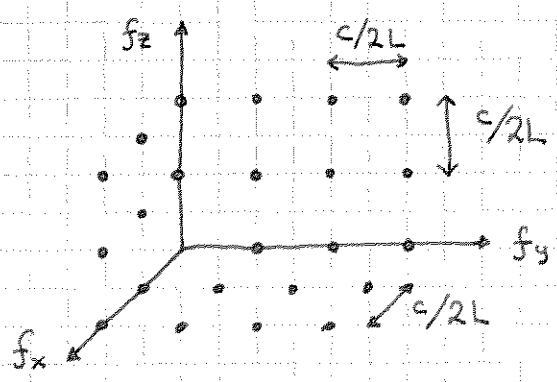
$$\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$$

$$\text{med } k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{\pi}{L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

og dermed

$$f = c/\lambda = ck/2\pi = \frac{c}{2L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

Nå er ikke frekvensen f en vektor, men det er klart at vi kan framstille de mulige verdier av f i den ene oktanten av et tredimensjonalt rom med akser f_x , f_y og f_z , der $f_x = n_x \cdot c/2L$ osv., slik at $f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}$:

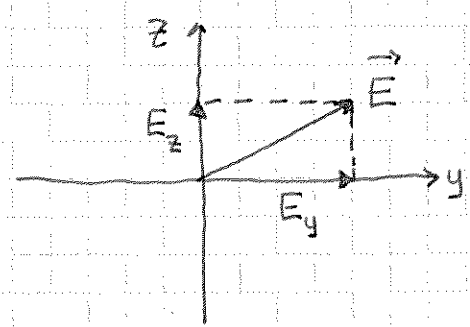


Vi ser at det er 1 mulig frekvens pr kube med volum $(c/2L)^3$ i dette rommet.

Antall mulige frekvenser innenfor et tynt (åttendedels!) kuleskall med radius f og tykkelse df må være gitt som forholdet mellom volumet av dette kuleskallet og volumet pr tillatte frekvens :

$$\frac{\text{vol. av } \frac{1}{8} \text{ kuleskall}}{\text{vol. pr mulig frekvens}} = \frac{\frac{1}{8} \cdot 4\pi f^2 df}{(c/2L)^3} = \frac{4\pi V f^2 df}{c^3}$$

For hver mulige frekvens har vi to uavhengige polarisasjonsretninger, f.eks. for bølge med $\vec{k} = k_x \hat{x}$:



Dermed: 2 svingemoder pr frekvens

$$\Rightarrow \text{Antall svingemoder mellom } f \text{ og } f+df : dN = 2 \cdot 4\pi V f^2 df / c^3$$

Dermed: $dN/V \cdot df = 8\pi f^2/c^3$

(III)

og

$$\eta(f, T) = \langle E \rangle \cdot \frac{8\pi f^2}{c^3}$$

ders

$$u(T) = \int_0^{\infty} df \langle E \rangle \cdot \frac{8\pi f^2}{c^3}$$

Merk: Så langt har vi ikke sagt noe om systemet kan betraktes klassisk eller kvantemekanisk. Vi har bare brukt Maxwells ligninger til å forlegge de mulige frekvensene i strålingshulrommet, og dermed antall svingemoder pr volum- og frekvensenhet, $8\pi f^2/c^3$.

La oss nå først bruke klassisk fysikk. Da er $\langle E \rangle$ ikke avhengig av frekvensen til strålingen, men bare avhengig av temperaturen:

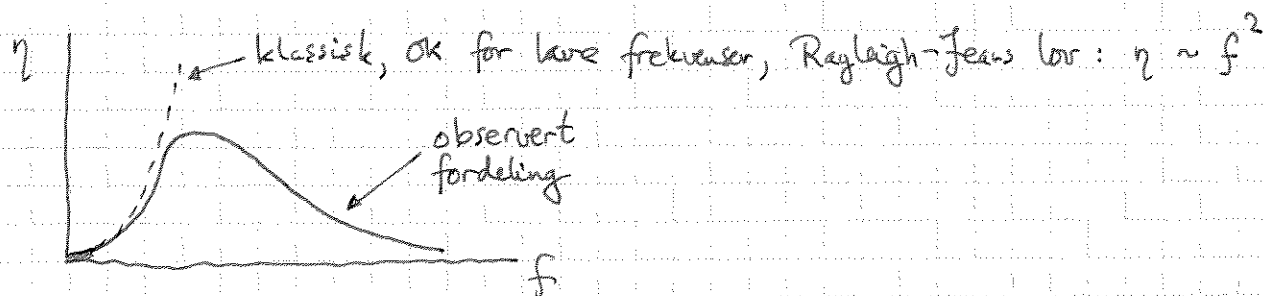
$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$, ders 2 kvadratiske ledd i energifunksjonen, og dermed er midlere energi pr svingemode

$$\langle E \rangle = 2 \cdot \frac{1}{2} kT = kT$$

i følge eknipartisjonsprinsippet (s. 38). Dette gir

$$\eta(f, T) = kT \cdot 8\pi f^2/c^3 \quad \text{og} \quad u(T) = \frac{8\pi kT}{c^3} \int_0^{\infty} f^2 df \rightarrow \infty$$

Den "ultrafiolette katastrofe"



Plancks hypotese (1900):

(112)

$$E = 0, hf, 2hf, 3hf, \dots$$

dvs

$$E_j = j \cdot hf \quad ; \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{kvantehypotesen})$$

$$\text{med } h \approx 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad (\text{Plancks konstant})$$

Statistisk mekanikk (Boltzmann, se s 39) gir nå
midlere energi :

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} E_j e^{-E_j/kT}}{\sum_{j=0}^{\infty} e^{-E_j/kT}} = \frac{1}{Z} \sum_{j=0}^{\infty} E_j e^{-\beta E_j} \quad (\beta = \frac{1}{kT})$$

med

$$Z = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-jhf\beta} = \sum_{j=0}^{\infty} x^j \quad (\text{med } x = e^{-hf\beta})$$

$$= 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-e^{-\beta hf}}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} E_j e^{-\beta E_j} = \sum_{j=0}^{\infty} jhf e^{-jhf\beta} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} e^{-jhf\beta} \right\}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \frac{1}{1-e^{-\beta hf}} \right\} = \frac{e^{-\beta hf} \cdot hf}{(1-e^{-\beta hf})^2}$$

$$\Rightarrow \langle E \rangle = \frac{hf e^{-\beta hf}}{1-e^{-\beta hf}} = \frac{hf}{e^{\beta hf} - 1}$$

$$\Rightarrow \eta(f, T) = \frac{hf}{e^{\beta hf} - 1} \cdot \frac{8\pi f^2}{c^3} = \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{f^3}{e^{\beta hf} - 1}$$

$$\Rightarrow u(T) = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{f^3 df}{e^{\beta hf} - 1}$$

↑ som samsvarer
med observert
fordeling!

Innfor $z = \beta h f$, dvs $f = z / \beta h$ og $df = dz / \beta h$: (113)

$$u(T) = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{(z/\beta h)^3 \cdot (dz/\beta h)}{e^z - 1} = \frac{8\pi}{h^3 c^3 \beta^4} \underbrace{\int_0^\infty \frac{z^3 dz}{e^z - 1}}_{= \pi^4/15}$$

$$\Rightarrow u(T) = A \cdot T^4; \quad A = \frac{8\pi^5 k^4}{15 h^3 c^3} \approx 7.56 \cdot 10^{-16} \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \cdot \text{K}^4}$$

Stefan-Boltzmanns lov, som funnet med kin. teori og termodynamikk s. 107, nå med fastlagt verdi på A .

Klassisk grense: Hvis termisk energi kT er mye større enn avstanden mellom energinivåene, "ser" vi ikke lenger at energinivåene er kvantiserte. Dvs, i grensen $kT \gg hf$ bør vi gjenfinne det klassiske resultatet $\langle E \rangle = kT$:

$$\langle E \rangle = \frac{hf}{e^{\beta hf} - 1} = \frac{hf}{1 + \beta hf + \dots - 1} \approx \frac{1}{\beta} = kT, \quad \text{OK!}$$

Som ventet forsvant h , og for lave frekvenser, $hf \ll kT$, gjelder Rayleigh-Jeans lov $\eta \sim f^2$.

Et par oppgaver:

• Vis at $\eta(f, T)$ har maksimum ved $\beta hf = 2.821$, slik at $f(\eta_{\max})/T = 2.821 k/h = 5.9 \cdot 10^{10} \text{ Hz/K}$ (*)

• Vis at med $u(T) = \int_0^\infty d\lambda \frac{du}{d\lambda} = \int_0^\infty d\lambda \mathcal{E}(\lambda)$ blir $\mathcal{E}(\lambda) = \frac{8\pi hc/\lambda^5}{e^{\beta hc/\lambda} - 1}$

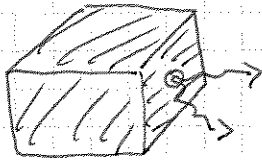
• Vis at $\mathcal{E}$ har maksimum ~~ved~~ ved frekvens λ slik at $\lambda(\mathcal{E}_{\max}) \cdot T = 2.90 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ (**)

(*), (**) er Wiens forskyvningslov

Energistrøm fra svart legeme

(114)

Vi lager et lite hull i en av veggene rundt strålingshulrommet:



I = energistrøm ut av åpningen, pr flate- og tidsenhet

= strålingsemittans $[W/m^2]$

Anta svarte vegger ($a=1$, $r=0$, se s. 106) og termisk likevekt, temp. T . Hvis åpningen tettes igjen, vil all stråling mot veggen absorberes, men da må like mye energi sendes ut, dvs emitteres fra veggen. (Hvis ikke kan veggene ikke være i termisk likevekt!) Med andre ord:

Energistrømmen ut av åpningen må være ekvivalent med energistrøm sendt ut fra svart legeme (med tilsvarende areal og orientering av flaten). Vi vil derfor bestemme I som definert ovenfor, og konkludere med at dette er strålingsemittansen til et svart legeme med temperatur T .

Vi skal vise at $I(T) = \sigma \cdot T^4$, der $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} W/m^2 \cdot K^4$.

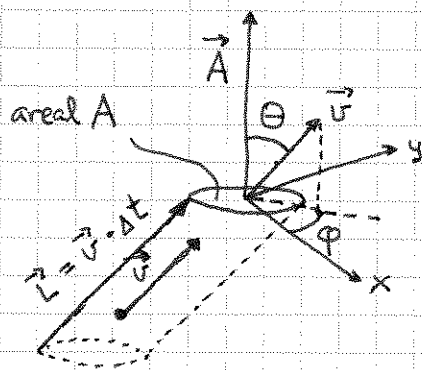
Hvis legemet ikke er helt svart, dvs hvis $r > 0$ og $a < 1$, blir $I(T)$ mindre enn for et perfekt svart legeme.

Vi kommer tilbake til det etter hvert.

For å finne $I(T)$ blir strategien som følger: Vi beregner først partikkelstrømmen ut gjennom åpningen. Med kjennskap til midlere energi pr partikkel i hulrommet kan vi deretter enkelt finne et uttrykk for energistrømmen.

Partikkelstrøm ut av åpning [PCH 9.6, "støttall"]
[LHL 14.5]

(115)



- vegg m/åpning i xy -planet,
- åpning m/areal A , dvs $\vec{A} = A \hat{z}$
- betrakt volumet
 $\Delta V = \vec{A} \cdot \vec{L} = A \cdot v \Delta t \cdot \cos \theta$
- $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; $0 \leq \theta \leq \pi/2$

- Partikler med hastighet $\vec{v}$ må befinne seg i volumet ΔV dersom de skal bidra til partikkelstrømmen gjennom A i løpet av tiden Δt
- Totalt antall partikler i ΔV er $N \cdot \frac{\Delta V}{V} = n \cdot \Delta V$. Her er N totalt antall partikler i hele volumet V .
- Sannsynligheten for at en gitt partikkel har hastighet "i d^3v om $\vec{v}$ " [dvs: hastighet mellom $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ og $\vec{v} + d\vec{v} = (v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z)$] er $F(\vec{v}) d^3v$ (se s 32), og med isotrop fordeling er $F = F(v)$, uavhengig av retningen på $\vec{v}$

$\Rightarrow$ Antall partikler med hastighet i d^3v om $\vec{v}$ som treffer A i løpet av tid Δt :

$$\Delta N = n \cdot \Delta V \cdot F(v) d^3v$$

Pr flate- og tidsenhet: $dj = \frac{\Delta N}{A \cdot \Delta t} = n v \cos \theta F(v) d^3v$

(Lamberts lov: $dj \sim \cos \theta$)

Kulekoordinater: $d^3r = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$

Hastighetsfordelingen integrert over alle retninger gir fartsfordelingen (se kap. 9):

$$\int_{\theta, \varphi} F(r) d^3r = 4\pi \int F(r) r^2 dr = \int f(r) dr \Rightarrow f(r) = 4\pi r^2 F(r)$$

Dermed:

$$j = \int dj = n \int_0^\infty r \underbrace{F(r) r^2 dr}_{f(r)/4\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta}_{\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2}}$$

$$j = \underbrace{\frac{n}{4} \int_0^\infty r f(r) dr}_{\langle v \rangle} = \frac{n}{4} \langle v \rangle, \quad \text{som gjelder for alle slags partikler}$$

Med fotoner: $\langle v \rangle = c$

$$\Rightarrow j = \frac{n}{4} c$$

Energi pr flate- og tidsenhet ut av åpningen:

$$I = j \cdot \frac{U}{N} = \frac{1}{4} \frac{N}{V} c \frac{u}{N} V = \frac{1}{4} u c; \quad u = AT^4$$

$$\Rightarrow \boxed{I(T) = \sigma T^4} \quad \text{med} \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$$

som da også er energi utstrålt fra svart legeme ved temp. T .

[Åpningen er et svart legeme: Sett utenfra vil all stråling som faller inn mot åpningen gå inn i hulrommet og absorberes i veggene, dvs ikke reflekteres fra åpningen, dvs $a=1$.]