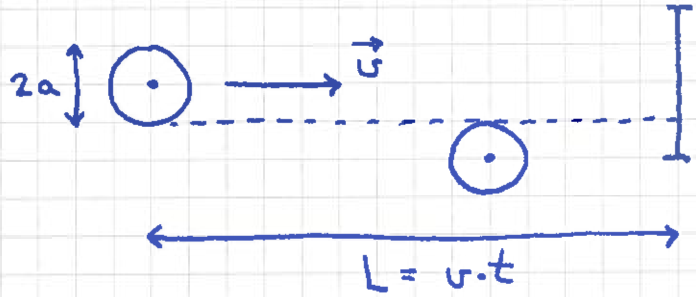
10.1 Midlere fri veilengde [LHL 14.4]

λ = midlere avstand tilbakelagt av gitt molekyl mellom to kollisjoner ("mean free path")

Modell: Harde kuler, radius a



$\sigma = \pi \cdot (2a)^2 = 4\pi a^2$

= <u>spredningstverrsnitt</u>

(scattering cross section)

Kula kolliderer med kuler med sentrum i sylinder med volum $V_t = L \cdot \sigma = v t \sigma$ i løpet av tida t.

Midlere antall partikler i V_t:

$$\frac{N_t}{N} = \frac{V_t}{V} \Rightarrow N_t = \frac{N}{V} \cdot V_t = n \sigma v t \qquad (n = N/V)$$

Gir kollisjonsfrekvens $N_t / t = n\sigma v$, dvs midlere kollisjonsfrekvens $n\sigma \langle v \rangle$, dvs midlere tid mellom kollisjoner ("collision time")

$$\tau = \frac{1}{n\sigma\langle v \rangle}$$

og dermed en midlere fri veilengde

$$\underline{\lambda} = \langle v \rangle \tau = \underline{\frac{1}{n\sigma}}$$

Alle partiklene beveger seg $\Rightarrow$ bør bruke midlere relativfart

$$\langle u \rangle = \langle |\vec{u}| \rangle = \langle |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \rangle = \text{... se boka ...} = \sqrt{2} \langle v \rangle,$$

som gir $\tau = 1/\sqrt{2} n\sigma \langle v \rangle$ og $\boxed{\lambda = 1/\sqrt{2}\, n\sigma}$.

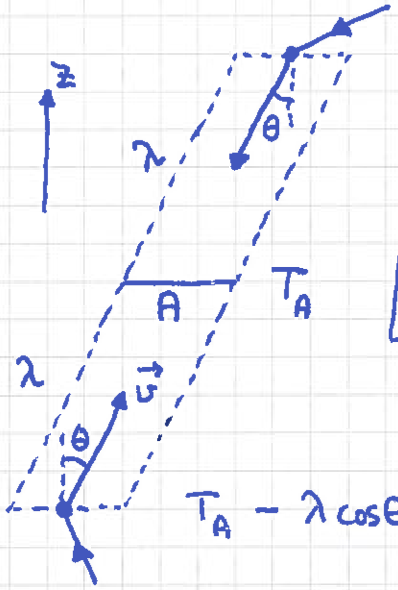
Eks: Luft, normale betingelser; $a \approx 1.5$ Å, $n = p/kT = 2.5 \cdot 10^{25}\ \text{m}^{-3}$

$\sigma = 4\pi a^2 = 2.8 \cdot 10^{-19}\ \text{m}^2 \Rightarrow \lambda = (\sqrt{2} n\sigma)^{-1} \approx 10^{-7}\ \text{m} = \underline{1000\ \text{Å}}$

10.5 Varmeledningsevne for gasser [LHL 14.5]

Bruker kinetisk gassteori til å beregne $\mathcal{H}$ i Fouriers lov.

Antar $T = T(z)$ og regner ut varmestrømtettheten j_z.



$$T_A + \lambda \cos\theta \frac{\partial T}{\partial z} = T_{ned}$$

$$T_A - \lambda \cos\theta \frac{\partial T}{\partial z} = T_{opp}$$

Siste kollisjon i midlere avstand λ fra A

Middelenergi pr partikkel:

$\varepsilon(T) = c_v \cdot T$

med $c_v = \frac{3}{2}k$ og $\frac{5}{2}k$

for hhv 1- og 2-atomige molekyler.

Netto bidrag til varmestrøm gjennom A pr flate- og tidsenhet fra molekyler med hastighet i $\pm(\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v})$:

$$dj_z = \frac{\varepsilon_{opp}\, dN}{A\ dt} - \frac{\varepsilon_{ned}\, dN}{A\ dt}$$

$$= (\varepsilon_{opp} - \varepsilon_{ned}) \frac{n\ A\ dz \cdot F(v) d^3v}{A\ dt} \qquad \left(\underset{\text{part.tetthet}}{n = N/V =}\right)$$

$$= c_v (T_{opp} - T_{ned}) \cdot n\, v_z\, F(v) d^3v$$

$$= -c_v \cdot 2\lambda \cos\theta \frac{\partial T}{\partial z} \cdot n\, v \cos\theta\, F(v)\, v^2 dv\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

⇒ Total varmestrømtetthet:

$$j_z = \int dj_z = -2c_v \lambda \frac{\partial T}{\partial z} n \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta}_{1/3} \underbrace{\int_0^{\infty} v \underbrace{F(v) v^2}_{f(v)/4\pi} dv}_{\langle v \rangle / 4\pi}$$

$$= -\underbrace{\frac{1}{3} n \lambda c_v \langle v \rangle}_{\mathcal{H}} \frac{\partial T}{\partial z}$$

Med $\lambda = (\sqrt{2}\, n\sigma)^{-1}$ og $\langle v \rangle = \sqrt{8kT/\pi m}$:

$$\boxed{\mathcal{H} = \frac{2}{3}\frac{c_V}{\sigma}\sqrt{\frac{kT}{\pi m}}}$$

Merk:
- $\mathcal{H}$ uavh. av n, dvs uavh. av trykket p
- bryter sammen når $\lambda \sim L$ = systemets lineære utstrekning (Knudsen-området); da blir $\mathcal{H} \sim n$

10.7 Diffusjonskonstant for gasser

Med varierende tetthet av en gitt type partikler, $\tilde{n} = \tilde{n}(z)$, kan netto partikkelstrøm (av denne typen!) pr flate- og tidsenhet beregnes, på tilsvarende vis:

$$\frac{d\tilde{N}}{A \cdot dt} = \underbrace{-\frac{1}{3}\lambda \langle v \rangle}_{= D \text{ (Ficks lov)}} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial z}$$

Med λ og $\langle v \rangle$ som ovenfor:

$$\boxed{D = \frac{2}{3n\sigma}\sqrt{\frac{kT}{\pi m}}}$$

(Med n = total partikkeltetthet)

Teori vs eksperiment:

Luft, 20°C, 1 atm: $\mathcal{H} = 0.026$ W/m·K (luft), $D \approx 2 \cdot 10^{-5}$ m²/s (O_2 i luft)

Kinetisk teori: $\mathcal{H} = \left(2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} / 3 \cdot 4\pi \cdot (1.5 \cdot 10^{-10})^2\right) \cdot \sqrt{\frac{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 293}{\pi \cdot 29 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27}}}$

$$\left.\begin{aligned} &\approx 0.014 \text{ W/m·K} \\ D &\approx \ldots = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} \end{aligned}\right\} \text{Ikke så verst!}$$

Vi noterer oss til slutt at $\mathcal{H}/D = n \cdot c_V$ med kinetisk teori.