

Eks: Hva er varmetapet gjennom en yttervegg som måler $2.40 \text{ m} \times 5.00 \text{ m}$ og som har 20 cm mineralull mellom 3 cm gran på hver side? Gran og mineralull har varmeledningsevne hhv 0.14 og $0.035 \text{ W/m}\cdot\text{K}$.
Hva er temperaturen på hver side av isolasjonslaget?
Anta 22°C inne og -8°C ute.

Løsn: Dette er en seriekobling av 3 varmemotstander,
 $R_Q^{(1)} = R_Q^{(3)} = \frac{0.03 \text{ m}}{(0.14 \text{ W/m}\cdot\text{K}) \cdot 12.0 \text{ m}^2} = 0.0179 \text{ K/W}$ og

$$R_Q^{(2)} = \frac{0.20 \text{ m}}{(0.035 \text{ W/m}\cdot\text{K}) \cdot 12.0 \text{ m}^2} = 0.4762 \text{ K/W}$$

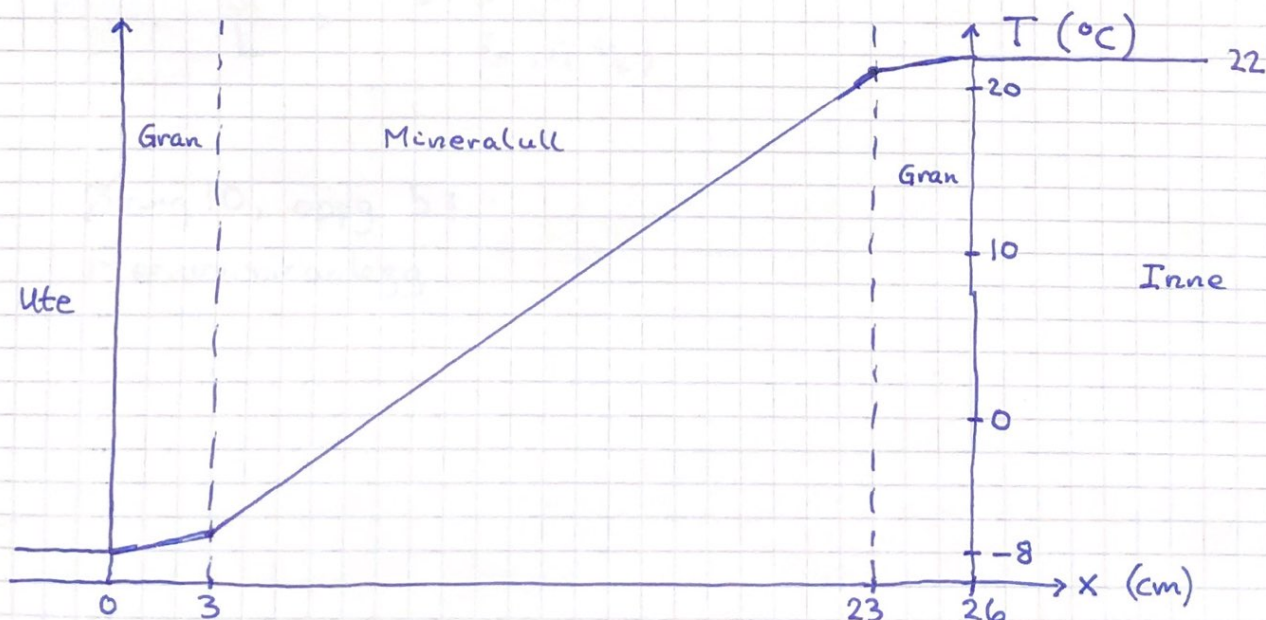
$$\Rightarrow R_Q = (2 \cdot 0.0179 + 0.4762) \text{ K/W} = 0.512 \text{ K/W}$$

$$\Rightarrow \text{Varmetap (effekt tap)} : P = \frac{\Delta T}{R_Q} = \frac{30 \text{ K}}{0.512 \text{ K/W}} = \underline{58.6 \text{ W}}$$

Temp.ending gjennom isolasjonslaget:

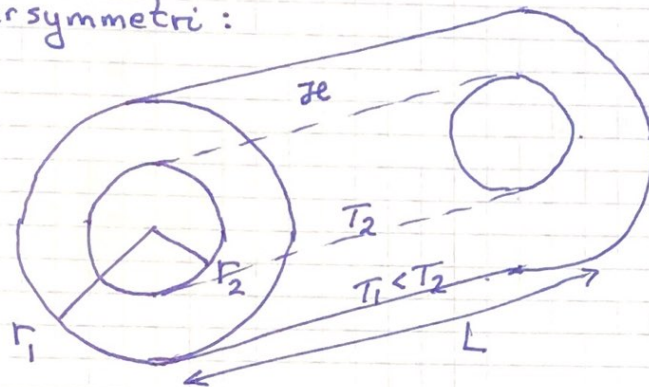
$$\Delta T_m = P \cdot R_Q^{(2)} = 58.6 \text{ W} \cdot 0.4762 \frac{\text{K}}{\text{W}} = 27.9 \text{ K} \approx 28 \text{ K}$$

$\Rightarrow$ Hhv 21°C og -7°C på indre og ytre overflate.



Stasjonær varmeledning med sylinder- og kulesymmetri: (1/3)

Sylindersymmetri:



$$T(r_1) = T_1$$

$$T(r_2) = T_2$$

$$\nabla T = \hat{r} \frac{dT}{dr}$$

$$\vec{j} = \hat{r} j(r)$$

Like stor varme pr tidsenhet $\dot{Q} = dQ/dt$ passerer gjennom enhver sylinderflate med radius r mellom r_2 og r_1 , lengde L og areal $A(r) = 2\pi r \cdot L$:

$$j(r) = \dot{Q}/A(r) = \dot{Q}/2\pi r L \quad \text{og} \quad j(r) = -\kappa \frac{dT}{dr}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{Q}}{L} \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r} = -2\pi\kappa \int_{T_2}^{T_1} dT$$

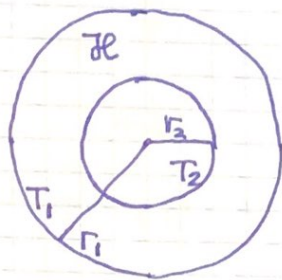
$\Rightarrow$ Varmeeffekt pr lengdeenhet, radielt utover:

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{2\pi\kappa (T_2 - T_1)}{\ln(r_1/r_2)}$$

Øving 10, oppg 5:

Fjernvarmeanlegg

Kulesymmetri:



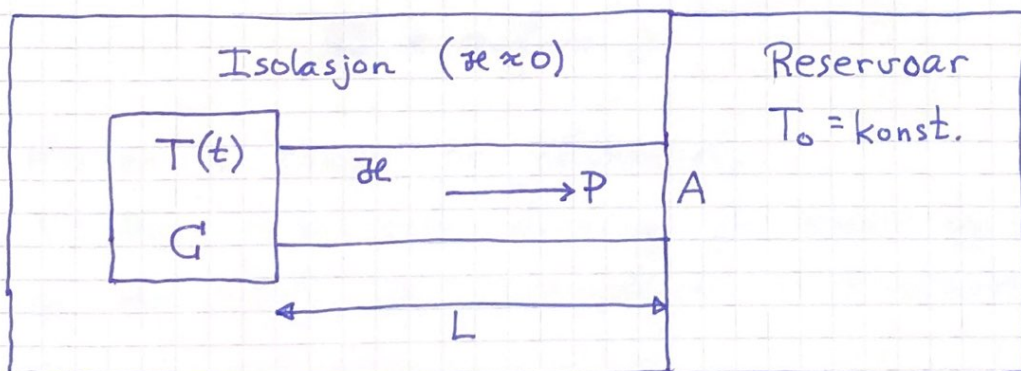
Konstant varme pr tidsenhet, $\dot{Q}$, passerer gjennom ethvert kuleskall med radius r mellom r_2 og r_1 , og areal $A(r) = 4\pi r^2$

$$j(r) = \frac{\dot{Q}}{4\pi r^2} \quad \text{og} \quad j(r) = -k \frac{dT}{dr}$$

$$\Rightarrow \dot{Q} \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r^2} = -4\pi k \int_{T_2}^{T_1} dT$$

$\Rightarrow$ Varmeeffekt radielt utover:

$$\dot{Q} = \frac{4\pi k (T_2 - T_1)}{1/r_2 - 1/r_1}$$

Newtons avkjølingslov

Hvordan avkjøles systemet med varmekapasitet C ?

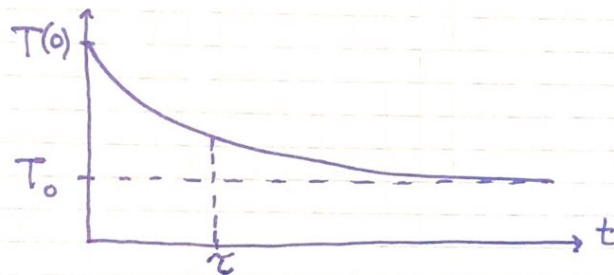
Varmederen har varmemotstand $R_Q = L/kA$.

Anta $T(0) > T_0$.

Løsning: $T(t) - T_0 = R_Q \cdot P = -R_Q \frac{dQ}{dt} = -R_Q \frac{C dT}{dt}$ (115)
 (Her er $dQ < 0$ og $dT < 0$.)

$$\Rightarrow \int_{T(0)}^{T(t)} \frac{dT}{T - T_0} = - \int_0^t \frac{dt}{R_Q C} = - \frac{t}{\tau} ; \tau = R_Q C \text{ (12)}$$

$$\Rightarrow T(t) = T_0 + [T(0) - T_0] e^{-t/\tau} ; \tau = \frac{L \cdot C}{\kappa \cdot A}$$



Varmeledningsligningen

Generelt er $T = T(\vec{r}, t)$. Finner da en partiell diff. ligning for T ved å kombinere energibevarelse med Fouriers lov.

Energibevarelse er uttrykt ved kontinuitetsligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

Her er u energi pr volumenhet.

Vi har tilsvarende ligning for masse og ladning, og som kjent for sannsynlighet i kvantemekanikken.

For et fast, lite volum V :

$$C_V = \frac{dU}{dT} = V \frac{du}{dT} \Rightarrow du = c \cdot dT ; c = C_V/V$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial T}{\partial t}$$

(116)

Fouriers lov gir $\nabla \cdot \vec{j} = -\nabla \cdot (\kappa \nabla T)$

Vi antar et homogent stoff med konstant κ slik at

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\kappa \nabla^2 T \quad ; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Dermed:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \nabla^2 T}$$

Varmeledningsligningen

$$D_T = \frac{\kappa}{c} = \text{termisk diffusivitet} \left(\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right)$$

c = varmekap. pr volumenhett ($\text{J/K} \cdot \text{m}^3$)

κ = varmeledningsevne ($\text{W/K} \cdot \text{m}$)

10.6, 10.8 Diffusjon

[LHL 18.5]

Diffusjon er transport av partikler pga konsentrasjonsforskjeller, fra høy mot lav konsentrasjon.

NB: Diffusjon er ikke strømming pga trykkforskjeller.

En "bakgrunn" av andre typer partikler sørger for at total konsentrasjon og trykk holder seg konstant.

Vi ser altså på en situasjon der konsentrasjonen n av en gitt type partikler varierer, generelt i både rom og tid, dvs $n(\vec{r}, t)$.

Empirisk er beskrivelsen av diffusjon nøyaktig som for varmeledning.

Partikkelstrømtettheten proporsjonal med konsentrasjonsgradienten:

$$\vec{j} = -D \nabla n$$

Ficks lov

$\vec{j}$ = netto antall partikler av gitt type som passerer gjennom en flate, pr tids- og flateenhet ($\frac{1}{m^2 \cdot s}$)

n = antall partikler av gitt type pr volumenhet ($\frac{1}{m^3}$)

D = diffusjonskonstanten ($\frac{m^2}{s}$)

Partikkelbevarelse er uttrykt i kontinuitetsligningen

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

Kombinasjon av Ficks lov og kont.lign. gir

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla n)$$

som med homogene omgivelser og konstant D gir

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \nabla^2 n$$

Diffusjonsligningen

Noen tallverdier: (ved 20°C , 1 atm, enhet cm^2/s)

• CO_2 : 0.16 H_2O : 0.24 (i omgivende luft)

• Ladbærere i Si (silisium, halvleder):

Elektroner: $D_n = 39$ Hull: $D_p = 12$

• Gasser i vann: CO_2 : $1.67 \cdot 10^{-5}$ H_2 : $4.58 \cdot 10^{-5}$