

Oppgave 1

a) La oss ta det enkleste først: Siden v_x^3 er en antisymmetrisk (odde) funksjon av v_x og $g(v_x)$ er en symmetrisk (like) funksjon av v_x , må integralet av produktet av disse to fra $-\infty$ til ∞ bli lik null. Videre er (med $b = m/2kT$ som i forelesningene):

$$\begin{aligned}\langle |v_x| \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} |v_x| g(v_x) dv_x = 2 \int_0^{\infty} v_x g(v_x) dv_x \\ &= 2 \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int_0^{\infty} v_x e^{-mv_x^2/2kT} dv_x \\ &= \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}} \cdot \frac{kT}{m} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{kT}{m}} \simeq 0.80 \sqrt{\frac{kT}{m}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle v_x^4 \rangle &= \sqrt{\frac{b}{\pi}} \left(-\frac{d}{db} \right)^2 \sqrt{\frac{\pi}{b}} \\ &= \sqrt{b} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot b^{-5/2} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{m}{2kT} \right)^{-2} = 3 \left(\frac{kT}{m} \right)^2\end{aligned}$$

Med andre ord, $\langle v_x^4 \rangle^{1/4} \simeq 1.32 \sqrt{kT/m}$.

b) Vi har fartsfordelingen $f(v)$ fra forelesningene, slik at

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle &= \int_0^{\infty} \frac{1}{v} f(v) dv \\ &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v e^{-mv^2/2kT} dv \\ &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \frac{kT}{m} \\ &= \frac{\sqrt{2/\pi}}{\sqrt{kT/m}} \\ &\simeq \frac{0.80}{\sqrt{kT/m}}\end{aligned}$$

Til sammenligning er

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sqrt{\frac{kT}{m}}$$

(fra forelesningene), slik at

$$\frac{1}{\langle v \rangle} \simeq \frac{0.63}{\sqrt{kT/m}}.$$

Oppgave 2

a) Fra forelesningene har vi $\langle v^2 \rangle = 3kT/m_{\text{molekyl}} = 3RT/M$, der R er gasskonstanten og M er molekylens molare masse. Denne bør i følge oppgaven være mindre enn $V^2/36 = Gm/18r$, dvs

$$\frac{3RT}{M} < \frac{Gm}{18r} \Rightarrow T < \frac{GMm}{54Rr},$$

hvis vi på lang sikt skal unngå at molekylene forsvinner helt fra atmosfæren.

b) Jordas masse er $6.0 \cdot 10^{24}$ kg og dens radius er $6.4 \cdot 10^6$ m. Hydrogen, med molar masse 2 g, kunne derfor tenkes å finnes i jordas atmosfære dersom jordas overflatetemperatur var mindre enn ca 280 K. I gjennomsnitt er den litt høyere enn dette, ca 290 K, så vi kan ikke forvente å finne særlig mye hydrogen i vår atmosfære, konsistent med de faktiske forhold. Nitrogen og oksygen, derimot, har hhv 14 og 16 ganger større molar masse enn hydrogen, noe som gir en tilsvarende høyere toleranse for overflatetemperaturen, hhv 3900 K og 4460 K. Med andre ord, ingen overraskelse at både N_2 og O_2 har holdt seg på plass her nede.

For Jupiter er masse og radius hhv $1.9 \cdot 10^{27}$ kg og $7.2 \cdot 10^7$ m. Dette gir mulighet for hydrogen i atmosfæren med overflatetemperatur opp mot 8000 K. I virkeligheten er den ikke mer enn i overkant av 120 K, så det er fullt mulig med hydrogen på Jupiter. Jupiters atmosfære inneholder da også omlag 90% hydrogen.

Vår måne har masse og radius hhv $7.4 \cdot 10^{22}$ kg og $1.7 \cdot 10^6$ m. En atmosfære med nitrogen ville dermed fordre en overflatetemperatur mindre enn 177 K. I realiteten kommer temperaturen ved månens ekvator opp mot 400 K (på solsiden, selvsagt), konsistent med at månen praktisk talt ikke har noen atmosfære.

Oppgave 3

a) Sannsynlighetsfordelingen $p(s)$ må være normert, slik at

$$1 = p(1) + p(-1) = C(e^{-x} + e^x) = 2C \cosh x.$$

Dette fastlegger konstanten C og dermed partisjonsfunksjonen Z :

$$Z = 1/C = 2 \cosh x = 2 \cosh \frac{\mu_B B}{kT}.$$

b) Magnetiseringen blir $M = Nm/V$, dvs

$$M = \frac{N\mu_B}{V} (-p(1) + p(-1)) = \frac{N\mu_B}{V} C (-e^{-x} + e^x) = \frac{N\mu_B}{V} \frac{2 \sinh x}{2 \cosh x} = \frac{N\mu_B}{V} \tanh x,$$

med $x = \mu_B B/kT$. Vi bruker oppgitte grenseverdier for hyperbolsk tangens og får for høye temperaturer, dvs $x \ll 1$:

$$M = \frac{N\mu_B}{V} \cdot \frac{\mu_B B}{kT} = \frac{N\mu_B^2}{kV} \cdot \frac{B}{T},$$

i tråd med Curies lov, som nettopp sier at magnetiseringen er omvendt proporsjonal med temperaturen, for ikke for lave temperaturer.

I den motsatte grensen, dvs $x \gg 1$, er $\tanh x = 1$, og magnetiseringen blir

$$M = \frac{N\mu_B}{V}.$$

Som ventet: Det ytre magnetfeltet er så sterkt at alle elektronspinnene peker i samme retning som magnetfeltet (her: i positiv z -retning).

Hvis $T = 0$, er $x = \infty$ uansett styrken på magnetfeltet. Igjen er alle elektronspinn i laveste energitilstand (grunntilstanden), med samme retning som \mathbf{B} .

Oppgave 4

For en reversibel kretsprosess vil entropien være uendret. (Hvis prosessen er irreversibel, vil entropien øke.) Varmemengdene Q_3 og Q_1 tilføres systemet hhv ved temperaturene T_3 og T_1 . Derneft avgis varmen Q_2 ved omgivelsenes temperatur T_2 . Energibevarelse gir

$$Q_2 = Q_1 + Q_3.$$

Uendret entropi innebærer da at

$$0 = \sum_i \Delta S_i = \frac{Q_3}{T_3} + \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2},$$

dvs

$$\frac{Q_3}{T_3} + \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_1 + Q_3}{T_2},$$

eller

$$Q_1 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = Q_3 \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3} \right).$$

Maksimal virkningsgrad er derfor

$$\varepsilon_K = \frac{Q_1}{Q_3} = \frac{T_1(T_3 - T_2)}{T_3(T_2 - T_1)}.$$

En alternativ framgangsmåte er som følger: Prosessen kan ses på som en Carnotmaskin som opererer mellom temperaturene T_3 og T_2 kombinert med en kjølemaskin som opererer mellom T_1 og T_2 . Dermed:

$$\varepsilon_K = \frac{Q_1}{Q_3} = \frac{W}{Q_3} \cdot \frac{Q_1}{W} = \frac{T_3 - T_2}{T_3} \cdot \frac{T_1}{T_2 - T_1} = \frac{T_1(T_3 - T_2)}{T_3(T_2 - T_1)}.$$

Oppgitte temperaturverdier gir teoretisk virkningsgrad

$$\varepsilon_K = \frac{277 \cdot (373 - 293)}{373 \cdot (293 - 277)} = 3.7.$$

Til sammenligning vil et ideelt Carnot-kjøleskap som opererer mellom temperaturene 277 K (inni kjøleskapet) og 293 K (omgivelsene) ha en virkningsgrad $\varepsilon_K = 277/(293 - 277) = 17$. I praksis vil irreversible prosesser gi betydelig lavere virkningsgrader enn dette.

Kommentar: Kjølemediets temperatur T_1 (når det passerer inni kjølerommet) er nok i virkeligheten en god del lavere enn temperaturen i selve kjølerommet, kanskje ned mot ti kuldegrader eller mer. Dette vil gi en betydelig mindre virkningsgrad enn beregnet ovenfor.